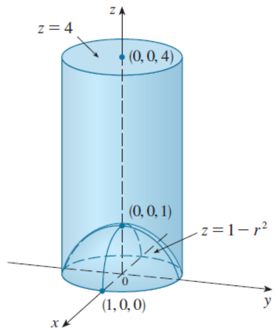
תרגיל 5

אינטגרל משולש

1. מצא את הנפח של התחום החסום ע"י $y=x^2$, $y=x+2$, $4z=x^2+y^2$ ו $z=x+3$

חשב את $\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$ כאשר הגוף המוגבל על ידי המשטחים $x^2+y^2=1$, $z=1-x^2-y^2$, $z=4$ והפונקציה נתונה על ידי $\rho(x,y,z)=5\sqrt{x^2+y^2}$.



פתרון

$$\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz = 5\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\left(\int_{1-x^2-y^2}^{4} dz\right)dxdy = 5\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\left(3+x^2+y^2\right)dxdy =$$

$$= 5\iint_A r\left(3+r^2\right)rdrd\theta = 5\int_0^1\left(3r^2+r^4\right)dr\int_0^{2\pi}d\theta = 10\pi\left(r^3+\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 12\pi$$

2. השתמש באינטגרל המשולש כדאי לחשב הנפח בין שתי הפראבולואידים $z=x^2+y^2$ ו $z=18-x^2-y^2$.

פתרון

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} 1dzdxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2}^{18-r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r(18-2r^2)drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[9r^2-(1/2)r^4\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi}(81-(81/2))d\theta = 81\pi$$

<u>אינטגרל קווי</u>

3. חשב את $\int_c ydx + x^2dy$ כאשר L הוא המסלול מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$ הנתון ע"י $y = 2x$.

<u>פתרון</u>

$P(x,y) = y, Q(x,y) = x^2$

ההצגה הפרמטרית של העקום היא : $r(t) = (t,2t)$ כאשר $0 \le t \le 2$.

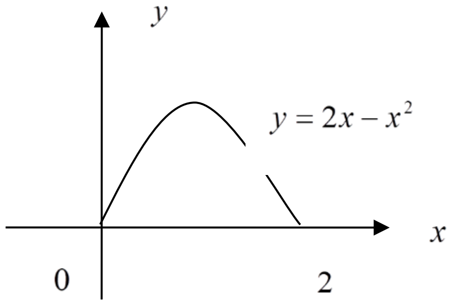
ולכן נקבל :

$$\int_c ydx + x^2dy = \int_0^2 \left(2t,t^2\right)\left(1,2\right)dt = \int_0^2 2t + 2t^2dt = t^2 + \frac{2t^3}{3}\Big|_0^2 = 9\frac{1}{3}$$

4. חשב את $\int_L ydx + (y + x^2)dy$, כאשר L הוא חלק של הפרבולה $y = 2x - x^2$ $(y \ge 0)$ לפי כיוון השעון.

<u>פתרון</u>

נשרטט את הגרף :



$P(x,y) = y, Q(x,y) = y + x^2$

ההצגה הפרמטרית של העקום היא : $r(t) = (t, 2t + t^2)$ כאשר $0 \le t \le 2$.

ולכן נקבל :

$$\int_c ydx - (y + x^2)dy = \int_0^2 \left(2t - t^2, -2t\right)\left(1, 2 - 2t\right)dt = \int_0^2 -2t + 3t^2dt = -t^2 + t^3\Big|_0^2 = 4$$

<u>משפט גרין</u>

5. עבור המסילה הסגורה C שברביע הראשון ומחוברת מ הקווים $x = 0, y = 1, y = x^2$

חשב לפי משפט גרין את האינטגרל $\oint_C$ [illegible]

<u>פתרון</u>

6. עבור המשולש C עם הקודקודים $(0,0);(1,1);(1,2)$ חשב ע"י משפט גרין את האינטגרל $\int_C xydx + x^2y^3dy$.

פתרון

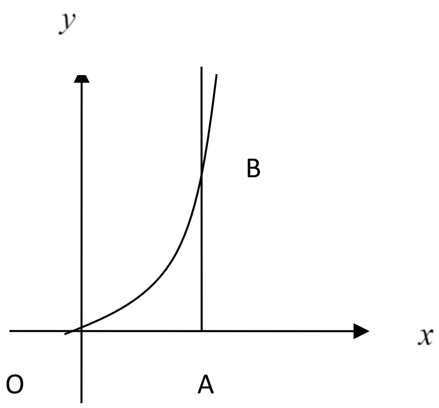
$$\int_C xydx + x^2y^3dy = \iint_A \left(\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) dxdy = \iint_A (2xy^3 - x)\, dxdy =$$

$$= \int_0^1 x\left(\int_x^{2x} (2y^3 - 1) dy \right) dx = \int_0^1 x\left(\frac{y^4}{2} - y \right)\Bigg|_x^{2x} dx = \int_0^1 \left(\frac{15x^5}{2} - x^2 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{15x^6}{12} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{12}$$

7. חשב לפי משפט גרין את האינטגרל $\oint_L 2xy^3dx + 4x^2y^2dy$

פתרון



תחום D המוגבל על ידי השפה L (ראה השרטוט) הוא קשיר.

לפי משפט גרין נקבל :

$$\oint_C 2xy^3dx+4x^2y^2dy=\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)\right)dxdy=$$

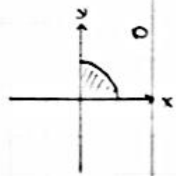
$$\iint_D 2xy^2dxdy=2\int_0^1\int_0^{x^3} xy^2dydx=\frac{2}{3}\int_0^1 x(x^3)^3dx=\frac{2}{33}x^{11}\Big|_0^1=\frac{2}{33}$$

אינטגרל משטחי

8. חשב את המסה של חלק הספרה $\{x^2+y^2+z^2=1\ , z\ge 0\ , x\ge 0\ , y\ge 0\}$ בעלת הצפיפות $\rho(x,y,z)=xz$.

פתרון

מדובר באינטגרל משטחי מסוג ראשון.



$$M=\iint_D \rho(x,y,z)\cdot\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\ dxdy$$

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}\quad , z\ge 0\ \longrightarrow\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$F=\sqrt{1-x^2-y^2}-z=0$$

$$F_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\quad , F_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\quad , F_z=-1$$

$$\iint_D x\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1}\quad dxdy=$$

$$\iint_D x\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}}\ dxdy=$$

$$\iint_D x\ dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot r\cos\theta\ drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{3}\cos\theta\Big|_0^1 d\theta=$$

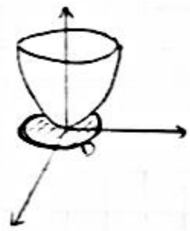
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos\theta\ d\theta=\frac{1}{3}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

9. חשב את השטף של השדה $(y,-x,z^2)$ דרך הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$.

פתרון

מדובר באינטגרל משטח מסוג שני.

ההטל על x-y: $\quad 0 \le x^2+y^2 \le 1$



$$\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_D \frac{\bar{F}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}\cdot\hat{k}|}\,dx\,dy$$

$$\bar{n} = (2x, 2y, -1)$$

$$\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_D (y, -x, (x^2+y^2)^2)\,(2x, 2y, -1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (-(x^2+y^2)^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^4\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{r^6}{6}\Big|_0^1\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{6}\,d\theta = -\frac{\pi}{3}$$

10. חשב את $\iint_s \bar{F}d\bar{s}$ כאשר $\bar{F} = -y\hat{x} + x\hat{y} + 3z\hat{z}$, S הוא חצי הכדור $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

פתרון

$$\sqrt{16-x^2-y^2} - z = 0$$

$$\bar{n} = \left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}, -1\right)$$

$$\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_D \left(-y\cdot\frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}} + x\cdot\frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}} + 3\sqrt{16-x^2-y^2}\cdot(-1)\right)dx\,dy$$

$$= -3\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy = -3\int_0^{2\pi}\int_0^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot(-2r)\cdot\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(16-r^2)^{1\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{2}}\Big|_0^4\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -64\,d\theta = -128\pi$$

משפט גאוס וסטוקס

11. חשב את שטף החיצוני של השדה $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$ דרך מעטפת הגוף: $0 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$.

פתרון

נשתמש במשפט גאוס.

$$div(F)=\left(\frac{y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+\frac{x^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

לפי משפט גאוס נקבל:

$$\iint_S F\hat{n}dS=\iiint_V div(F)dV=\iiint_V \frac{2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}dV=$$

נעבור לקואורדינטות כדוריות ונקבל:

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\frac{2}{\left(r^2\right)^{1/2}}r^2\sin\phi drd\phi d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}r\sin\phi drd\phi d\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi d\theta=6\int_0^{2\pi}d\theta=12\theta$$

12. חשב $\int_C (x+z)dx+(x-y)dy+xdz$ כאשר C הוא שפת האליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ על המישור: $z=1$

<u>*פתרון*</u>

נחשב את הנורמל. האליפסה נמצא על המשטח: $z-1=0$ ולכן נחשב את הנורמל למשטח זה וננרמל אותו:

$$\hat{n}=(0,0,1)$$

נחשב את הרוטור של F:

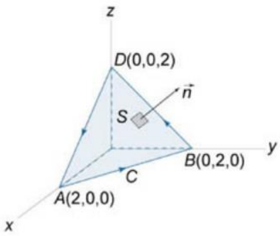
$$rot(F)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+z & x-y & x \end{vmatrix}=(0,0,1)$$

לכן, לפי משפט סטוקס נקבל: $\int_C \vec{F}dr=\iint_S (0,0,1)(0,0,1)dS=\iint_S dS$

S הוא אליפסה ושטח של אליפסה הוא: πab.

ולכן במקרה שלנו: $\iint_S dS=2\cdot 3\cdot \pi=6\pi$

13. חשב $\int_C (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$ כאשר C הוא שפת המשולש שקודקודיו נמצאים בנקודות: $A(2,0,0),B(0,2,0).D(0,0,2)$



פתרון

משוואת מישור ABD : $x+y+z=2$

$\vec{n}=(1,1,1,)$ ולכן : $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$rot(F)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix}=(2,2,2)$$

לכן, לפי משפט סטוקס נקבל : $\int_C \vec{F}dr=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (1,1,1)(2,2,2)dS=\frac{6}{\sqrt{3}}\iint_S dS$

S הוא משולש שווה צלעות. ולכן אנו יודעים לחשב את שטחו. נמצא את אורך הצלע שלו :

$|AD|=\sqrt{8}$

ולכן, שטח המשולש : $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}=2\sqrt{3}$

ולכן נקבל : $\frac{6}{\sqrt{3}}\iint_S dS=\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}=12$

14. השתמש במשפט Gauss (div) כדי לחשב האינטגרל $\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$ כאשר $\vec{F}=xy\sin(z)\vec{i}+(\cos(xz)+y)\vec{j}+y\cos z\vec{k}$ והתחום D הוא השפה של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

פתרון

לפי משפט Gauss, $\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS=\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\ dV$ כאשר V הוא הנפח החסום ע"י D.

עכשיו, $\nabla\cdot\vec{F}=y\sin z+1-y\sin z=1$, ולכן

$\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS=\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\ dV=volume\ of\ V=(4/3)\pi abc$.