תרגיל בית 3 בקורס 89-214 סמסטר א' תשע"ד

נהלים בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך ההגשה הוא בשבוע המתחיל ב-10.11.2013 לידי המתרגל.

תזכורת תהא G חבורה. הגדרנו את הסדר של איבר $a \in G$ להיות המספר הטבעי המינימלי n כך שמתקיים $a^n = e$ וסימנו $|a| = n$. הגדרנו את חבורת אוילר להיות החבורה של כל האיברים ההפיכים במונואיד $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, וסימנו $U_n = U(\mathbb{Z}_n)$.

שאלה 1. עבור כל אחת מן החבורות U_9, U_{12} ו-$(\mathbb{Z}_8, +)$ מצאו את כל האיברים וענו:

1. מה הסדר של כל איבר?
2. אם החבורה ציקלית, כמה יוצרים שונים יש לה?

שאלה 2. תהי G חבורה ויהי איבר $a \in G$ מסדר אינסופי. הוכיחו כי אם $m \neq n$, אז $a^m \neq a^n$.

שאלה 3. הוכיחו בעזרת טבלאות כפל כי כל חבורה מסדר 2 וכל חבורה מסדר 3 היא ציקלית. מצאו כמה יוצרים יש בכל מקרה. רמז: אם מניחים בשלילה שחבורה לא ציקלית, מה לומדים על סדר האיברים?

שאלה 4. תהא קבוצה X כלשהי (אם זה עוזר, אפשר להניח שהיא סופית) ומגדירים את קבוצת החזקה $P(X)$ להיות קבוצת כל תת הקבוצות של X. נגדיר על $P(X)$ את פעולת ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. ענו עבור $(P(X), \triangle)$ האם הוא אגודה? האם הוא מונואיד? האם הוא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

שאלה 5. יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. $b \mid a$ אם ורק אם $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$.
2. נגדיר קבוצה $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv : u, v \in \mathbb{Z}\}$. הוכיחו $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a, b) \cdot \mathbb{Z}$.
3. $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = [a, b] \cdot \mathbb{Z}$.

שאלה 6. תנו דוגמה נגדית לכל אחת מן הטענות השגויות הבאות:

1. תהא G חבורה מסדר זוגי. אם $x^3 = y^3$, אז $x = y$.
2. תהא G חבורה אבלית מסדר n. ודאי קיים איבר מסדר n בחבורה G.
3. כל חבורה מסדר 8 היא אבלית. רמז: למשל חבורה המוגדרת באופן דומה לחבורת מטריצות מתרגיל הבית הקודם.

בהצלחה!