

אפקרה סינארית

נתונה מערכת משוואות $Ax=b$ $x=?$

אלגינצית האוס:

ביתחם המטריצה M_{ik} כן טבלה שבה k נאס את

$$k+1 \leq i \leq n$$

קבלת M_{kk} ע"י פעולת שורה.

נעם עמטריצה משוואות עציונה ונעשה חישוב באחור.

 M_{kk} לקח pivot .

שיטה 2: האוס זורדן

אילו צבר חן שנתפס את המטריצה A עמטריצה היתורה I .בתורה זה הוקטור \vec{x} החגם יהיה שווה עוקטור הפתוחות

.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & -3 & 6 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -9 & -2 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - \frac{9}{4}R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 6.5 & 3.25 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-4} \\ R_3 \leftarrow \frac{R_3}{6.5} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2}R_3 \\ R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right)$$

" X

בניות בשו"ת הדירוג

(נונה והערכת הטלה :

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 1.6 \\ 1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

פתרון והערכת התאבוק:

נניח שיש לנו מחיר עם 3 סמך שטחולית

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 1.6 & 32.1 \\ 1 & 0.6 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 100R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 1.6 & 32.1 \\ 0 & -159.4 & -3188 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 1.6 & 32.1 \\ 0 & -159 & -3190 \end{array} \right)$$

$$y = \frac{-3190}{-159} = 20.1$$

$$x \Rightarrow 0.01x + 1.6 \cdot 20.1 = 32.1 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

וההאם נראויל סר סר הסוק?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.6 & 22 \\ 0.01 & 1.6 & 32.1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 0.01 \cdot R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.6 & 22 \\ 0 & 1.594 & 31.88 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.6 & 22 \\ 0 & 1.59 & 31.9 \end{array} \right)$$

$$y = \frac{31.9}{1.59} = 20.1$$

$$x = 22 - 0.6 \cdot 20.1 = \boxed{9.95}$$

תרגיל: פתור את המערכת הבאה באמצעות קאונצ'ון אקסטרנזיט גאוס

1.55 המפת שורה 1 ו-2 עוזב. $\varepsilon \approx 0$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: הפתרון המדויק

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{\varepsilon} R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} & 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right)$$

$$\boxed{y=1} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

הסיכום:

אלמלא pivot יפוע אפיון 0.

קאונ - pivot קטן $\varepsilon \approx 0$, נוצרת בעיה שזורה במתרון.

11 pivoting חלקי - כולל רק שחלוף שורות

כיצד נבחר את האלמנט הפזע? קיטר קצתו המוחלט עמו

קראו ||

סימונים: איתנו מחפשים שורת הק עם איברים הנמוכים

נמחם כאן

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 3 \\ \boxed{4} & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \rightarrow \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ \boxed{2} & 6 & 4 & 14 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 6 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \rightarrow \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 3\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{4}{7}R_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 3\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{11}{7} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{x_3=1} \\ 3\frac{1}{2}x_2 + 2\frac{1}{2} = 6 \\ \boxed{x_2=1} \end{matrix}$$

$$4x_1 + 8 = 16$$

\Downarrow

$$\boxed{x_1=2}$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

pivoting חזק

כאן מותר להחליף שורות בין שורות, כי זה לא משנה את הפתרון.
 (אם אתה רוצה להחליף עמודות, זה יותר מורכב ויש להשתמש ב-matrix exchange)
 הפיתרון - pivot. זהו הפיתרון המצוי. $x \rightarrow$ וזהו הפיתרון המצוי.

תרגיל: (מורה המצאת)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{6}R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1\frac{1}{6} & 3\frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 13/6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 3\frac{5}{6} & 1\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 13/6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{35/6}{5}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -27/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ -27/30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\frac{27}{30}x_1 = -\frac{27}{30} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$5x_3 + 4 = 4 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$$

$$6x_2 + 5 = 17 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

row pivoting - המיון בצורת טור יחד איתו.

row pivoting - המיון בצורת שורה.

row scaling - רכיב שורה

row pivoting - יחד עם;

row pivoting - המיון בצורת טור.

Scaling

צורך בקנה אחד:

$$S_i = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$$

צורך בקנה אחד של המטריצה שבהם.

צורך במטריצה $K \times K$ (צורך וקטור δ):

$$\delta_i = \left\{ \frac{|a_{ij}|}{S_i} \right\}$$

$$\max \{\delta_i\}$$

קבוצה האמה:

row pivoting

(מציאת השורה המגוונת עם השורה ה- p , והצגת עמודה 1.

משק עם המטריצה $(K-1) \times (K-1)$

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 106 \end{pmatrix}$$

(תורה הקציה)

row scaling - צורך

לפתור את המערכת:

$$S = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 100 \end{pmatrix}$$

מערכת משוואות 3x3

$$Y = \begin{pmatrix} 7/7 \\ 6/6 \\ 3/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

לפי התקדמות מוקדמות ה-1 עם קצת פירוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 50 & 0 & 24 \\ 0 & 15/7 & 1 & 3\ 3/7 \\ 0 & 335/7 & 100 & 95\ 5/7 \end{array} \right)$$

המטרה 2x2:

$$Y = \begin{pmatrix} 1\ 5/7 / 6 \\ 335/7 / 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.285 \\ 0.478 \end{pmatrix}$$

מתקבלת המערכת המוקדמת ה-2 עם מוקדמות ה-1, וכן
 עם המטרה ה-1 במתחם המוקדמות ה-1:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 50 & 0 & 24 \\ 0 & 335/7 & 100 & 95\ 5/7 \\ 0 & 15/7 & 1 & 3\ 3/7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 50 & 0 & 24 \\ 0 & 335/7 & 100 & 95\ 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow X_3 = 0 ; X_2 = 2 ; X_1 = 2$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{והקטור}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{הפתרון המיוקד}$$

ניתן לחשב גם ב-3 מסלול שמשווה

קצת יותר את המערכת $AX=B$ בעזרת pivoting
 קצת יותר המערכת $AX=B$ בעזרת Scaling

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 100 & 105 \\ -1 & 3 & 100 & 102 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 100 & 105 \\ 0 & 3.67 & 1.33 & 135 \\ 0 & 1.66 & -34.3 & -33 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1.66}{3.67} R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 100 & 105 \\ 0 & 3.67 & 1.33 & 135 \\ 0 & 0 & -82.4 & -82.6 \end{array} \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.939 \\ 1.09 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 3: \delta = \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.01 \\ \boxed{0.5} \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 100 & 102 \\ 3 & 2 & 100 & 105 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 99 & 104 \\ 0 & -4 & 103 & 99 \end{array} \right)$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

2x2: $\delta = \begin{pmatrix} \boxed{5/100} \\ -4/100 \end{pmatrix}$ כן 5 הוא החדש שמה
 בהתאמה שמו הרים כלום.

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{4}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 99 & 104 \\ 0 & 0 & 182 & 182 \end{array} \right)$$

$\boxed{x_3 = 1}$:

$$5x_2 + 99 = 104 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 + 2 - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$