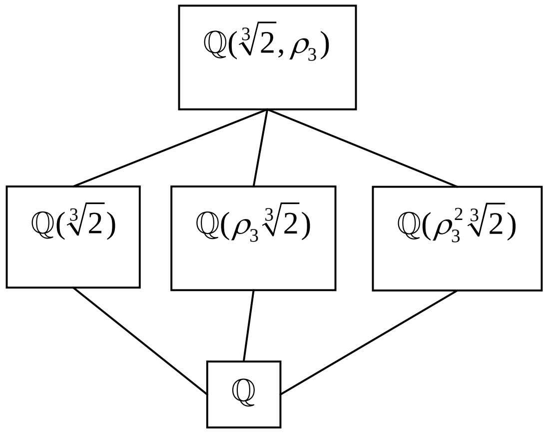
אלגברה מופשטת 3 - תרגול 5

הערה לגבי התרגיל האחרון מהתרגול הקודם:



הפולינום $\Phi_2(x)=x^2+x+1$ נשאר אי-פריק מעל $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ וכבר אמרנו שהאוטומורפיזם בחבורת גלואה מחליף בין השורשים $\rho_3,\rho_3^{\,2}$ (נסמנו ב σ_1). אבל $\Phi_2(x)=x^2+x+1$ הוא אי-פריק גם מעל $\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2})$, והאוטומורפיזם בחבורת גלואה עדיין מחליף בין $\rho_3,\rho_3^{\,2}$ (נסמנו ב σ_2), האם מדובר באותו אוטומורפיזם? לא! σ_1 קובע את $\sqrt[3]{2}$ ו σ_2 קובע את $\rho_3\sqrt[3]{2}$, אם כך $\sigma_2(\sqrt[3]{2})=\dfrac{\sigma_2(\rho_3\sqrt[3]{2})}{\sigma_2(\rho_3)}=\dfrac{\rho_3\sqrt[3]{2}}{\rho_3^{\,2}}=\rho_3^{\,2}\sqrt[3]{2}$. אם כך יש לנו 3 אוטומורפיזמים שונים מסדר 2 של $E=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\rho_3)$ מעל $\mathbb{Q}$, ולכן $Gal(E/\mathbb{Q})\cong S_3$.

משפט: כל שדות הפיצול של פולינום $f(x)\in F[x]$ איזומורפיים מעל F.

יהי E/F שדה פיצול של $f(x)\in F[x]$.

משפט: $Gal(E/F)$ פועלת טרנזיטיבית על שרשי $f(x)$.

הגדרה: $f(x)\in F[x]$ **ספרבילי** אם כל שורשיו שונים (בשדה פיצול כלשהו E). כלומר אף שורש לא מופיע עם ריבוי בפירוק של $f(x)$ מעל E.

משפט: $|Gal(E/F)|\le[E:F]$ ויש שיוויון אם ורק אם E שדה פיצול של פולינום ספרבילי.

משפט: אם E/F שדה הפיצול של פולינום $f(x)\in F[x]$ ספרבילי אי-פריק מדרגה n אזי $n\,\big|\,|Gal(E/F)|$.

תרגיל: האם שדות הפיצול של $x^4-4,x^4+4\in\mathbb{Q}[x]$ הם איזומורפיים?

פתרון: שורשי הפולינום $x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$ הם $\pm\sqrt{2}\cdot i,\pm\sqrt{2}$.

אם כך שדה הפיצול של הפולינום הוא $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ וחבורת גלואה שלו היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$:

זאת כיוון ש x^2+1 אי-פריק מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ולכן הצמדה היא איבר מסדר 2 בחבורת גלואה, בצורה דומה $\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2}$ הוא אוטומורפיזם מסדר 2 של חבורת גלואה. חבורה מסדר 4 עם (לפחות) 2 איברים מסדר 2 היא בהכרח $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

השורשים של $x^4+4=(x^2+2i)(x^2-2i)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ הם $\pm\sqrt{2i},\pm i\sqrt{2i}$. אבל $\sqrt{2i}=1+i$. ע"כ השורשים הם $\pm(1+i),\pm(i-1)$. אם כך נקבל ששדה הפיצול של הפולינום הוא $\mathbb{Q}(i)$ וחבורת גלואה שלו היא $\mathbb{Z}_2$.

לכן שדות הפיצול אינם איזומורפיים כי אחרת חבורת גלואה שלהם היתה איזומורפית.

תרגיל: הראו שכל שדה K עם p^n איברים הוא שדה פיצול של הפולינום $f(x)=x^{p^n}-x$ מעל $\mathbb{Z}_p$.

פתרון: K^* היא חבורה מסדר p^n-1 ולכן לפי תורת החבורות מתקיים $a^{p^n-1}=1$ לכל $a\in K^*$. מתקיים לכן $a^{p^n}=a$ לכל $a\in K$ ולכן כל האיברים בשדה הם שורשים של $f(x)=x^{p^n}-x$, אבל יש לכל היותר p^n כאלה ולכן הפולינום מתפצל מעל K.

מסקנה: כל השדות עם p^n איברים הם איזומורפיים (כי כל שדות הפיצול של $f(x)=x^{p^n}-x$ הם איזומורפיים).

משפט: $p(x)\in F[x]$ ספרבילי אם ורק אם $(p(x),p'(x))=1$.

טענה: אם $p(x)$ אי-פריק וגם $p'(x)\neq 0$ אזי הוא ספרבילי.

דוגמא: קיים פולינום אי-פריק ואי-ספרבילי.

פתרון: נגדיר $F=\mathbb{Z}_2(t)$ שהוא שדה השברים של חוג הפולינומים $\mathbb{Z}_2[t]$. נתבונן כעת בפולינום $f(x)=x^2-t\in F[x]$.

הפולינום $f(x)$ אי-ספרבילי, כיוון ש $x^2-t=(x-\sqrt{t})(x+\sqrt{t})=(x+\sqrt{t})^2$. והוא אי-פריק כי $\sqrt{t}\notin F$. (צריך להוכיח $\sqrt{t}\notin F$)

הגדרה: שדה נקרא מושלם (perfect) אם כל פולינום אי-פריק מעל השדה הוא ספרבילי.

טענה: כל שדה סופי הוא מושלם.

הוכחה: יהי F שדה סופי. יהי $f(x)$ פולינום אי-פריק מעל F. נגדיר $K=F[x]/<f(x)>$. זהו שדה סופי בעל p^n איברים, וזהו שדה פיצול של הפולינום $g(x)=x^{p^n}-x$ מעל $\mathbb{Z}_p$. אם כך ל $g(x)$ ו $f(x)$ יש שורש משותף ולכן $f(x)|g(x)$ ב $F[x]$. אבל $g(x)$ ספרבילי, וכל פולינום שמחלק פולינום ספרבילי הוא ספרבילי.

תרגיל:
יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ פולינום אי-פריק. יהי $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול של $f(x)$. הראו שאם $Gal(E/\mathbb{Q})=Q_8$ (חבורת הקווטרניונים) אזי בהכרח $\deg(f)\geq 8$.

פתרון: בתרגול הבא.