בדיקה

תרגיל: חשבו את: .1 $\aleph_0^{\aleph}$. $\aleph^{\aleph_0}$.

פתרון: $\aleph_0^{\aleph}$; כזכור, אם $2\le a\le b$ (עבור a,b עוצמות אינ׳) אז $2^b=a^b$.

לכן $\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$

$\aleph^{\aleph_0}$; $\aleph^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$

מסקנה:

$$|\{f:\mathbb{Q}\to\mathbb{C}\}|=|\mathbb{C}^{\mathbb{Q}}|=\aleph^{\aleph_0}=\aleph$$

תרגיל: 1. חשבו את $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$

פתרון: $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$

2. חשבו את $|X|=|\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\mid f(1)\le f(2)\}|$

פתרון: ברור ש:

$$X\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$
$$\Downarrow$$
$$|X|\le\aleph$$

כעת נמצא קבוצה

$$Y=\left\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \middle|\ \begin{matrix}f(1)=1\\ f(2)=1\end{matrix}\right\}$$

כלל: $Y \subseteq X$

סרך נמצא תת בעוצמן של Y

$$Y = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(1) = f(2) = 1 \}$$

$$|Y| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N} \setminus \{1,2\}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N} \setminus \{1,2\}} \ni g$$

$$F(g) = \begin{cases} 1 & n = 1,2 \\ g(n) & n \geq 3 \end{cases} \in Y$$

משאיר לבדוק ש- F חח״ע ועל.

לפי ק.ש.ב. $|X| = \aleph$

---

3. $X = \{ f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \notin \mathbb{Q} \;\; f(x) = 1 \}$

פתרון:

$$|X| = |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \ni g$$

$$F(g) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ g(x) & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \in X$$

F חח״ע ועל (כמו קודם)

נראה על

תהי $f\in X$ כלומר אם $x\notin\mathbb{Q}$ $f(x)=1$

אם $x\in\mathbb{Q}$ אין שום ל-$f(x)$

עבור $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ כלשהי

$$g(x)=f(x)=f|_{\mathbb{Q}}$$

אז $F(g)=f$

תרגיל: יהי S יחס על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המוגדר

[illegible] $f\,S\,g \iff \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$

1. הוכיחו ש-S שקילות
2. תהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו $|[f]_S|$
3. חשבו את $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$

פתרון:

1. רפלקסיביות;

$$\forall x\in\mathbb{R};\quad f(x)-f(x)=0\in\mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$f\,S\,f$$

2. סימטרי

$$f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$g(x)-f(x)=-(f(x)-g(x))\in\mathbb{Z}$$

3. טרנזיטיביות:

$$f \leq g \;\wedge\; g \leq h$$

$$\downarrow$$

צ"ל $f \leq h$.

$$\forall x \quad f(x)-g(x) \in \mathbb{Z} \;\wedge\; g(x)-h(x) \in \mathbb{Z}$$

$$f(x)-h(x) = \underbrace{f(x)-g(x)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{g(x)-h(x)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

2. טענה:

$$\left|[f]_{s}\right| = \left|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}\right|$$

$$\downarrow$$

צ"ל $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

נגדיר $F: [f]_s \to \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$

$$F(\underset{\Downarrow}{\overset{[f]}{g}}) = f(x) - g(x)$$

1. F מוגדרת היטב כי $f(x)-g(x) \in \mathbb{Z}$

מכיון ש- $g \in [f]_s$

2. F חח"ע

$$F(g_1) = F(g_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall (x) \quad f(x) - g_1(x) = f(x) - g_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g_1(x) = g_2 x$$

$$\Downarrow$$

$$g_1 = g_2$$

תהי. $g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ נבחר למשל $h \in [f]_S$

נרצה: $f-h = F(h) = g$

אזי $h = f-g$

ואכן $h \in [f]_S$ וגם

$$F(h) = f-h = f-(f-g) = g$$

לכן עוצמתו היא $|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$

3. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\right|$

נטען: $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\right| = \left|[0,1)^{\mathbb{R}}\right|$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S$ $\quad f(7.5) = 8.4 \quad f(7.5) - \lfloor f(7.5) \rfloor = 8.4 - 8 = 0.4$

עבור

$$F([f]) = f - \lfloor f \rfloor$$

ערך שלם

קל ש F מוגדרת היטב, חח"ע, ועל.

(נסו לבדוק)

לכן העוצמה היא $\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$

אקסיומת הבחירה

תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות לא ריקות

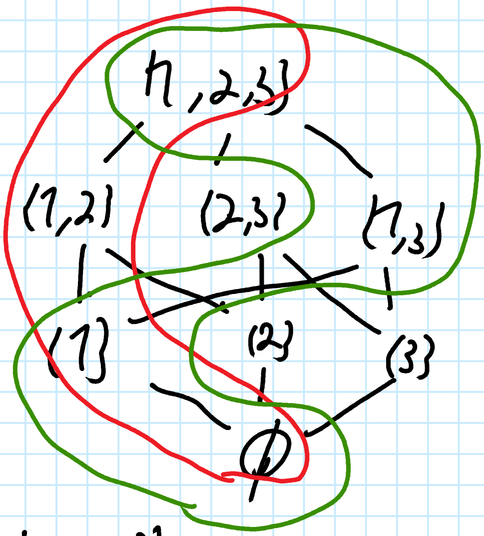
אז האקסיומת אומרת שקיימת פונק'

$$f:\{A_i\}_{i\in I}\to \bigcup_{i\in I} A_i$$

כך ש- $f(A_i)\in A_i$.

שרשראות

נתבונן ב- $(P(A),\subseteq)$ עבור $A=\{1,2,3\}$



* שרשרת היא תת קבוצה שיש עליה סדר מלא.

* שרשרת מקסימלית.

$B=\{\emptyset,\{1\}\}\subseteq P(A)$

שרשרת של $P(A)$

שרשרת שלא מוכלת בשרשרת אחרת - אם נוסיף לה איבר היא לא תהיה שרשרת

$B=\{\emptyset,\{1\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ - שרשרת מקסימלית.

עקרון המקסימום של האוסדורף

* כל שרשרת מוכלת בשרשרת מקסימלית

שקול לומר ש:

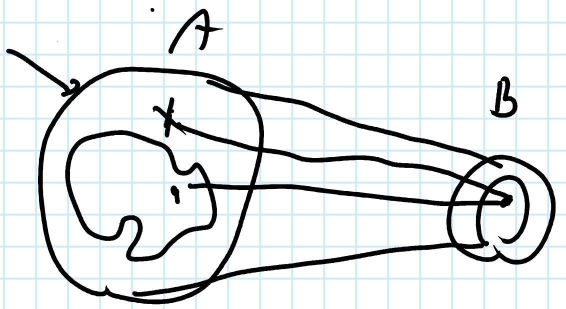
שאם $(A, \subseteq)$ יחס סדר.

אז קיימת $M \subseteq A$ שרשרת מקסימלית.

תרגיל:

תהי $f: A \to B$ פונק'. הוכח שקיים צמצום

חח"ע של f לקב' מקס' עבור $\subseteq$-ל.



פתרון:

$f: A' \to B$

נגדיר $M = \{A' \subseteq A \mid f|_{A'} \text{ חח"ע}\}$ עם יחס הכלה.

אז היחס הכלה הוא יחס סדר חלקי על M

לפי עקרון המקסימום קיימת שרשרת מקסימלית

C ב- M.

כעת נגדיר $A^* = \bigcup_{A' \in C} A'$

נראה חד; $f|_{A^*}$ חח"ע

נראה על; $Im(f|_{A^*}) = Im(f)$

הוכחה נראה חד; יהי $x_1 \neq x_2 \in A^*$ אז $f|_{A^*}(x_1) \neq f|_{A^*}(x_2)$

$$x_1, x_2 \in A^*$$

$\Downarrow$ קיימים A_1, A_2 כך ש-

$$x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2$$

כי $\mathcal{C}$ שרשרת ($A_1 \subseteq A_2$ או $A_2 \subseteq A_1$)

נניח בה"כ ש- $A_1 \subseteq A_2$

$$\Downarrow$$

$$x_1, x_2 \in A_2$$

וכן $f|_{A_2}$ - חח"ע

$$f|_{A^*}(x_1) = f|_{A_2}(x_1) \neq f|_{A_2}(x_2) = f|_{A^*}(x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$f|_{A^*}(x_1) \neq f|_{A^*}(x_2)$$

הוכחת טענה 2:

$$\left(Im(f|_{A^*}) = Im(f)\right)$$

($\subseteq$) $Im(f|_{A^*}) \subseteq Im(f)$ - כי זו פונ' מצומצמת.

($\supseteq$) $Im(f|_{A^*}) \supseteq Im(f)$

נניח בשלילה שקיים $b \in Im(f)$

כך שאין לו מקור ב- A^*

כלומר קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$

אך $a \notin A^*$

נתבונן ב- $A^* \cup \{a\}$ אז

$A^* \cup \{a\} \notin C$

כי $\bigcup_{A' \in C} A' \not\ni a$

סתירה לכך ש- C שרשרת שמימלית.