פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 5

1. $\sin(1)-\cos(1)+\sin(1)\left[i-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\sin(1)-\cos(1)+i\sin(1)$

2. πi

3. ע"י הזהות $\frac{w^3-8}{w-2}=w^2+2w+4$ מקבלים שהאינטגרנד הוא $\overline{z}^2+2\overline{z}+4$. על הציר המדומה, $\overline{z}=-z$ והאינטגרל שם הוא $\int_i^0\left(4-2z+z^2\right)dz=4z-z^2+\frac{z^3}{3}\Big|_i^0=-\left(4i+1-\frac{i}{3}\right)=-1-\frac{11}{3}i$.

על הקטע הממשי $\overline{z}=z$ והאינטגרל עליו הוא
$\int_0^1\left(z^2+2z+4\right)dz=\frac{z^3}{3}+z^2+4z\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1+4=\frac{16}{3}$.

האינטגרל הכולל הוא הסכום של השניים: $\frac{13}{3}-\frac{11}{3}i$

4. א. פשוט לראות כי אורך המסילה הוא $L=2+\pi$. האינטגרנד בערך מוחלט הוא $\left|e^z-\overline{e^z}\right|=\left|2i\,\mathrm{Im}\left(e^z\right)\right|=\left|2ie^x\sin y\right|=2e^x\left|\sin y\right|\le 2e^x$. במסילה שלנו x יכול להיות לכל היותר 1, ולכן $e^x\le e$. מכאן ש- $M=\max_{z\in\gamma}\left|e^z-\overline{e^z}\right|\le 2e$. בסה"כ האינטגרל חסום ע"י

$ML=2(\pi+2)e$

ב. קל לראות כי אורך המסילה הוא $L=\pi+2$. האינטגרנד בערך מוחלט (על המסילה) הוא $\left|\frac{2-z}{2+\overline{z}}\right|\le\frac{2+|z|}{\left|2-|\overline{z}|\right|}\le\frac{3}{1}=3$. כלומר $M\le 3$. בסה"כ $ML\le 3\pi+6$.