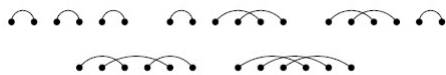


תרגיל בית 4 במתמטיקה בדידה 2

83-118 סמסטר ב' תשע"ט

15 במאי 2019

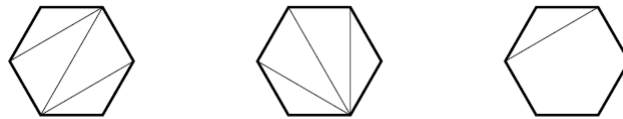
1. כמה הילוכי שריג $(8, 8) \rightarrow (0, 0)$ יש, שאינם נוגעים בישר $y = x + 4$?
2. כמה סדרות של n אחדות (1) ו- n מינוס אחדות (-1) יש, כך שכל הסכומים החלקיים (מההתחלה עד איבר כלשהו) הינם אי-שליליים?
3. נתבונן ב- $2n$ קודקודים על ציר ה- x (ממוקמים על הטבעיים $\{1, \dots, 2n\}$), לצורך נוחות). אנו רוצים לחבר זוגות ע"י קשת מעל הקודקודים באופן שאין אף קשת ממש מעל קשת אחרת. כמה אפשרויות יש לעשות זאת? הדרכה אפשרית: בהינתן זוג קודקודים (i, j) שיש ביניהם קשת, נתייחס אליה כקשת מהקטן לגדול. נניח שאנחנו עוברים על הקודקודים משמאל לימין, ונפתחו כמה קשתות, איזו תיסגר ראשונה? דוגמא עבור $n = 3$:



איור 1:

4. כמה סדרות של n מספרים שלמים (a_1, \dots, a_n) יש המקיימים: $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ ובנוסף: $\forall 1 \leq i \leq n : a_i \leq i$?
5. יהי P מצולע משוכלל בן $n + 2$ צלעות. אלכסון של P הוא קו ישר המחבר שני קודקודים של P ואינו צלע של המצולע. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם

אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של P . שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמא:



איור 2:

כאשר במשושה מצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, ומצד שמאל ובאמצע 2 שילוסים שונים.

(א) הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן $n + 2 \geq 3$ צלעות ניתן לשילוש ושיש בשילוש $n - 1$ אלכסונים.

(ב) כמה שילוסים אפשריים יש למצולע משוכלל בן $n + 2$ צלעות? הדרכה: בחרו שני קודקודים סמוכים, אז הקשת ביניהם נמצאת באיזשהו משולש בשילוש המצולע, ובחירת הקודקוד השלישי מחלקת את המצולע לשני תתי מצולעים. (עבור $n = 0$ הניחו שיש 'שילוש' אחד).

6. כמה עצים בינאריים במישור יש עם $2n + 1$ קודקודים, כך שלכל קודקוד שאיננו עלה יש שני בנים, אחד ימני ואחד שמאלי (בעץ כזה יש n קודקודים פנימיים, ועוד $n + 1$ עלים, סה"כ $2n + 1$ קודקודים)?