1

תרגול 2 במרוכבים

שורשים מ"ע של מספר מרוכב: שורש ה-n של מספר מרוכב z הוא מספר מרוכב w כך ש- $w^n=z$ ורושמים $\sqrt[n]{z}=w$. אם ל-z יש הצגה קוטבית $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ אז למשוואה $z=w^n$ יש n פתרונות שונים ע"י

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$$

כאשר $k=0,1,\dots,n-1$

תרגיל 1: חשבו $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$

פתרון: נרשום את $z=4\sqrt{3}-4i$ בצורה קוטבית

$$z=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=8\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

לכן

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{11}{6}\pi+2\pi k}{3}\right)\right)$$

כאשר $k=0,1,2$, לכן הפתרונות הם:

$$z_0=2\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right),\ k=0$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18}\right),\ k=1$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{35\pi}{18}+i\sin\frac{35\pi}{18}\right),\ k=2$$

תרגיל 2: חשבו $\sqrt[4]{1+i}$

פתרון: נסמן $z=1+i$, אז

$$z=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right)\right)$$ ②

כאשר $k = 0,1,2,3$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+8\pi k}{16}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+8\pi k}{16}\right)\right)$$

כאשר $k = 0,1,2,3$.

טורים אינסופיים של מספרים מרוכבים

הגדרה: אומרים שסדרה אין-סופית של מספרים מרוכבים $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $l \in \mathbb{C}$ אם מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - l| = 0$

הגדרה: אומרים שהטור האינסופי של מספרים מרוכבים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס לגבול l אם סדרת הסכומים החלקיים $w_k = \sum\limits_{n=1}^{k} z_k$ מתכנסת לגבול l.

אומרים שהטור האינסופי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס.

משפט: אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

משפט: תנאי הכרחי להתכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ הוא ש- $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

דוגמאות

מצאו את הערכים של z שבהם הטורים הבאים מתכנסים.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{nz^2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{2n} (z \neq 1)$, 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,(e^z-1)^n$

נספח 3 מרוכבות

פונקציית האקספוננט והפונקציות הטריגונומטריות

הגדרה: עבור $z = x+iy \in \mathbb{C}$ פונקציית האקספוננט המרוכבת $e^z = \exp(z)$ מוגדרת כ-
$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ ובעזרת פונקציה זו ניתן להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות המרוכבות

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$$

בעיה: הראו ש-$e^z=1$ אם"ם $z=2in\pi$
וש-$\sin z = 0$ אם"ם $z=n\pi$.

פתרון: נניח ש-$e^z=1$ ו-$z=x+iy$ אז
$e^x(\cos y + i\sin y)=1$ ומכאן נקבל ש-
$e^x = |e^x| = |e^x(\cos y+i\sin y)| = |1| = 1$, ולכן
$x=0$. לכן $\cos y + i\sin y = 1$ ומהשוואת החלקים הממשיים והמדומים נקבל ש-$\cos y=1$ ו-$\sin y = 0$.
הפתרון למשוואה $\cos y=1$ הוא $y=2\pi k$ והפתרון למשוואה $\sin y=0$ הוא $y=\pi k$ ולכן $y=2\pi k$ (k שלם).
לכן $z=0+i(2\pi k)=2\pi ik$.

נניח ש-$\sin z=0$, אז $e^{iz}=e^{-iz}$, ולכן
$e^{2iz}=1$ ומהסעיף הקודם נקבל ש-$2iz=2\pi ik$
לכן $z=\pi k$ (k שלם).

(2)

בעיה: הראו שכל מחזור של $\cos$ הוא כפולה שלמה של 2π.

פתרון: אם p מחזור של $\cos$ אז $\cos(z+p)=\cos z$, כלומר $\cos z\cos p-\sin z\sin p=\cos z$. אם נציב $z=\frac{\pi}{2}$ נקבל ש- $\sin p=0$ ולכן $p=\pi k$. אם נציב $z=0$ נקבל $\cos p=1$. מאחר ש- $\cos\pi k=1$ רק כאשר k זוגי, נקבל שכל המחזורים של $\cos$ הם מספרים מהצורה $2\pi k$ (k שלם).

בעיה: פתרו את המשוואה $\cos z=2$.

פתרון: אם $z=x+iy$ אזי עפ"י הגדרת $\cos$ נקבל

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-y+ix}+e^{y-ix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)$$

$$=\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)\cos x-i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\sin x=2$$

לכן $\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x=2$, $\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x=0$

מהמשוואה $(e^{y}-e^{-y})\sin x=0$ נובע $e^{y}-e^{-y}=0$, כלומר $y=0$, אבל $\cos x=2$

למשוואה זו אין פתרון. לכן $\sin x=0$, $x=\pi k$.

לכן $(e^{y}+e^{-y})(-1)^{k}=4$ לכן k זוגי ונקבל

את המשוואה $e^{y}+e^{-y}=4$, נכפיל ב- e^{y} ונקבל

$e^{2y}-4e^{y}+1=0$. נציב $t=e^{y}$ ונקבל $t^{2}-4t+1=0$

ונקבל $t=2\pm\sqrt{3}$ ולכן $y=\ln(2\pm\sqrt{3})$. לכן פתרונות

המשוואה $\cos z=2$ הם $z=2k\pi+i\ln(2\pm\sqrt{3})$.