בס"ד

חשבון אינפי 1 למדמ"ח

שיעור 7: בעיות מילוליות, רציפות, מיון נקודות אי רציפות, הקשר בין גזירות לרציפות

1. נתון מלבן בעל שטח קבוע. אורכו עולה בקצב של 10 מטר בשניה. מצאו את מהירות ירידת הרוחב בזמן בו אורך המלבן מגיע ל-3 מטרים ורוחבו מגיע למטר אחד.

פתרון:

נסמן: t - זמן

a-אורך

b-רוחב

S-שטח

נתון כי בזמן t_0 $a(t_0)=3$, $b(t_0)=1$ וכן נתון $\frac{da}{dt}=10$.

S קבוע ולכן $S=a(t_0)b(t_0)=3\cdot1=3$

צריך למצוא $\frac{db}{dt}(t_0)$.

$\frac{dS}{dt}=b(t)\frac{da}{dt}+a(t)\frac{db}{dt}$ ולכן $0=1\cdot10+3\cdot\frac{db}{dt}(t_0)$ ומכאן $\frac{db}{dt}(t_0)=-\frac{10}{3}$.

2. שתי מכוניות חולפות על פני הנקודה P באותו זמן. מכונית אחת נוסעת צפונה במהירות של 50 קמ"ש והשניה נוסעת מערבה במהירות של 60 קמ"ש. מצאו את מהירות השינוי של המרחק בין שתי מכוניות שעה אחת אחרי שחלפו על פני הנקודה P .

פתרון:

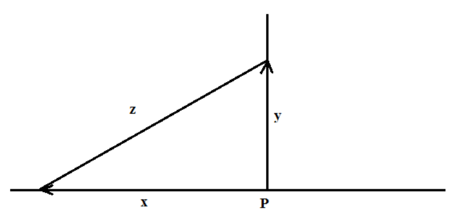
נסמן: t-זמן

y - מיקום המכונית הנוסעת צפונה

x - מיקום המכונית הנוסעת מערבה

z - מרחק בין שתי מכוניות

נמקם את הנקודה P בראשית הצירים $P(0,0)$.



נתון: $\frac{dy}{dt}=50$ (y עולה)

$\frac{dx}{dt}=-60$ (x יורד)

צריך למצוא $\frac{dz}{dt}(1)$.

$y(1)=50$, $x(1)=-60$ ולכן $10\sqrt{61}= \sqrt{50^2+60^2} = \sqrt{x^2(1)+y^2(1)} = z(1)$ - מרחק בין שתי המכוניות שעה אחרי שהן חלפו על פני הנקודה P .

$z^2=x^2+y^2$ ולכן $2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$ ומכאן $\frac{dz}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{z}$.

בזמן $t=1$ נקבל $\frac{dz}{dt}(1)=\frac{(-60)\cdot(-60)+50\cdot 50}{10\sqrt{61}}=10\sqrt{61}$.

הגדרה: f נקראת **רציפה** בנקודה c אם

א. f מוגדרת ב- c

ב. אם $x\approx c$, אז $f(x)\approx f(c)$.

משפט 1: f רציפה ב- c אם ורק אם $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.

משפט 2: יהיו f ו- g רציפות ב- c

א. לכל k קבוע $kf(x)$ רציפה ב- c .

ב. $f(x)+g(x)$ רציפה ב- c .

ג. $f(x)g(x)$ רציפה ב- c

ד. אם $g(c)\neq 0$, אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה ב- c .

ה. אם $f(c)>0$ ו- $n\in\mathbb{N}$, אזי $\sqrt[n]{f(x)}$ רציפה ב- c .

מסקנה:

א. כל הפולינומים רציפים לכל $x\in\mathbb{R}$

ב. פונקציות רציונליות $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפות כל עוד $g(x)\neq 0$, כאשר $f(x),g(x)$ פולינומים.

ג. $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{Q}$ רציפות לכל $x>0$.

משפט 3: תהי $y=f(x)$ מוגדרת כאשר $x=c$. נסמן $\triangle y=f(c+\triangle x)-f(c)$.

אזי הטענות הבאות שקולות:

א. f רציפה ב- c .

ב. אם $x\approx c$, אזי $f(x)\approx f(c)$

ג. אם $st(x)=c$, אזי $st(f(x))=f(c)$.

ד. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

ה. אם $\triangle x \approx 0$, אזי $\triangle y \approx 0$.

משפט 4: אם f גזירה ב- c, אזי f רציפה ב- c.

שימו לב: ההיפך אינו נכון (דוגמא בשאלה 6 בהמשך)

ניתן להשתמש במשפט זה כדי להוכיח רציפות של פונקציות טרנסצנדנטיות $\sin x, \cos x, e^x, \ln x$

משפט 5: אם f רציפה ב- c ו- G רציפה ב- $f(c)$, אזי הפונקציה $g(x)=G\left(f(x)\right)$ רציפה ב- c, כלומר הרכבה של פונקציות רציפות רציפה אף היא.

3. מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

א. $f\left(x\right)=\sqrt{\left|x-2\right|+1}$

פתרון:

פונקציה $g\left(x\right)=\left|x-2\right|+1>0$ רציפה וחיובית לכל $x\in\mathbb{R}$

$h(x)=\sqrt{x}$ רציפה לכל $x\geq 0$ לכן $f\left(x\right)=\left(h\circ g\right)\left(x\right)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$ כהרכבה של שתי פונקציות רציפות.

אפשרות אחרת לנמק את הרציפות היא לפי משפט 2 סעיף ה' לעיל.

ב. $f\left(x\right)=\dfrac{x+3}{\left|x+3\right|}$

פתרון:

$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x>-3\\ -1 & x<-3\end{cases}$ פונקציה זו רציפה לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3\right\}$ וב- $x=-3$ הפונקציה אינה רציפה, כי אינה מוגדרת בנקודה זו.

נשים לב ש- $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x+3)}{\left|x+3\right|}=1\neq\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{(x+3)}{\left|x+3\right|}=-1$, כלומר הגבולות החד צדדים בנקודה $x=-3$ סופיים ושונים ולכן $x=-3$ היא נקודת אי רציפות **מסוג ראשון (קפיצה).**

ג. $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-9}$

פתרון:

נמצא את תחום ההגדרה:

$x^2-9\geq 0$ ולכן $D\left(f\right)=\left(-\infty,-3\right]\cup\left[3,\infty\right)$. בתחום זה הפונקציה רציפה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות $g\left(x\right)=x^2-9$ ו- $h\left(x\right)=\sqrt{x}$, $f\left(x\right)=\left(h\circ g\right)\left(x\right)$.

ד. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} & x\neq\frac{\pi}{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

פתרון:

לכל $x\neq\frac{\pi}{3}$ הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה בנקודה $x=\frac{\pi}{3}$.

צריך לבדוק האם מתקיים $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=st\left(\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\vartriangle x\right)-\cos\frac{\pi}{3}}{\vartriangle x}\right)$ כאשר $\vartriangle x=x-\frac{\pi}{3}\approx 0,\vartriangle x\neq 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=st\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\vartriangle x\right)-\cos\frac{\pi}{3}}{\vartriangle x}\right)=\left(\cos x\right)'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ולכן הפונקציה לא רציפה ב- $x=\frac{\pi}{3}$.

ה. $f(x)=[x]\cos\frac{\pi x}{2}$

פתרון:

$D(f)=\mathbb{R}$

פונקציה $g(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

פונקציה $h(x)=[x]$ רציפה בכל קטע פתוח $(n-1,n)$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$ ולכן בכל קטע פתוח $(n-1,n)$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$ הפונקציה $f(x)=[x]\cos\frac{\pi x}{2}$ רציפה כמכפלה של פונקציות רציפות.

נותר לבדוק רציפות בנקודות השלמות $x=n,n\in\mathbb{Z}$.

נחלק את הנקודות השלמות ל- 4 קבוצות

$$A_1=\{x=4k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$
$$A_2=\{x=1+4k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$
$$A_3=\{x=2+4k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$
$$A_4=\{x=3+4k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

$\lim\limits_{x\to 4k^+}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=4k$, $\lim\limits_{x\to 4k^-}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=(4k-1)$, הגבולות החד צדדיים שונים ולכן

הגבול $\lim\limits_{x\to 4k}[x]\cos\frac{\pi x}{2}$ לא קיים ולכן הפונקציה לא רציפה בכל הנקודות של A_1.

$\lim\limits_{x\to(1+4k)^+}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to(1+4k)^-}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=0=f(1+4k)$ ולכן הפונקציה רציפה בכל הנקודות של A_2.

$\lim\limits_{x\to(2+4k)^+}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=-(2+4k)$, $\lim\limits_{x\to(2+4k)^-}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=-(1+4k)$, הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול $\lim\limits_{x\to 2+4k}[x]\cos\frac{\pi x}{2}$ לא קיים ולכן הפונקציה לא רציפה בכל הנקודות של A_3.

$\lim\limits_{x\to(3+4k)^+}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to(3+4k)^-}[x]\cos\frac{\pi x}{2}=0=f(3+4k)$ ולכן הפונקציה רציפה בכל הנקודות של A_4.

לסכום הפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k \text{ or } x=2+4k, k\in\mathbb{Z}\}$

4. עבור אילו ערכים של a,b,c הפונקציה הבאה רציפה ב- $[-1,\infty)$?

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{3-x}}+a & x>3 \\ b & x=3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-c}{x-3} & -1\le x<3 \end{cases}$$

פתרון:

מספיק לבדוק רציפות בנקודה $x=3$, כי בשאר הנקודות של $[-1,\infty)$ הפונקציה רציפה כהרכבה, סכום ומנה של פונקציות רציפות.

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(e^{\frac{1}{3-x}}+a\right)=st\left(e^{-\frac{1}{\vartriangle x}}+a\right)$ כאשר $\vartriangle x=x-3\approx 0, \vartriangle x\neq 0$.

$-\frac{1}{\vartriangle x}$ מספר אינסופי שלילי ולכן $e^{-\frac{1}{\vartriangle x}} \approx 0$ ולכן

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(e^{\frac{1}{3-x}}+a\right) = st\left(e^{-\frac{1}{\vartriangle x}}+a\right) = a$$

$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x+1}-c}{x-3} = st\left(\frac{\sqrt{4+\vartriangle x}-c}{\vartriangle x}\right)$ כאשר $\vartriangle x = x-3 \approx 0, \vartriangle x \neq 0$.

על מנת שהגבול האחרון יהיה קיים חייב להתקיים $\sqrt{4+\vartriangle x}-c \approx 0$ ולכן $c=2$.

נציב $c=2$ ונחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = st\left(\frac{\sqrt{4+\vartriangle x}-2}{\vartriangle x}\right) = st\left(\frac{4+\vartriangle x-4}{\vartriangle x\left(\sqrt{4+\vartriangle x}+2\right)}\right) = st\left(\frac{1}{\left(\sqrt{4+\vartriangle x}+2\right)}\right) = \frac{1}{4}$$

כדי שהפונקציה תהיה רציפה ב-$x=3$ צריך להתקיים:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = a = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{4} = f(3) = b.$$

לסיכום קיבלנו $a=b=\frac{1}{4}$ ו- $c=2$.

5. מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות:

א. $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

פתרון:

$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, כי $1-\cos 2x \geq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן ההגבלה היחידה על תחום ההגדרה מתקבלת מהמכנה.

בכל הנקודות של תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב- $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x}$$

נסתכל על הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}(\sin x-\sin 0)}{x} = \sqrt{2}(\sin x)'\Big|_{x=0} = \sqrt{2}\cos 0 = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}(\sin x-\sin 0)}{x} = -\sqrt{2}(\sin x)'\Big|_{x=0}$$

$$= -\sqrt{2}\cos 0 = -\sqrt{2}$$

הגבולות החד צדדיים סופיים ושונים ולכן נקודת אי הרציפות היא **מסוג ראשון (קפיצה).**

ב. $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$

פתרון:

$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

בכל הנקודות של תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב-0.

$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=st\left(\vartriangle x\cos\frac{1}{\vartriangle x}\right)$ כאשר $\vartriangle x\approx 0,\vartriangle x\neq 0$.

$|\vartriangle x|<a$ לכל $a>0$ ממשי

$\left|\cos\frac{1}{\vartriangle x}\right|\leq 1$ ולכן $\left|\vartriangle x\cos\frac{1}{\vartriangle x}\right|<a$ לכל $a>0$ ממשי ולכן $\vartriangle x\cos\frac{1}{\vartriangle x}\approx 0$

ולכן $\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=st\left(\vartriangle x\cos\frac{1}{\vartriangle x}\right)=0$, כלומר הגבול קיים וסופי אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=0$ ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות **סליקה**.

ג. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>1 \\ x-1 & x\leq 1\end{cases}$

פתרון:

הפונקציה מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$.

לכל $x\neq 1$ הפונקציה רציפה. נבדוק רציפות ב-$x=1$.

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=st\left(e^{\frac{1}{\vartriangle x}}\right)$ כאשר $\vartriangle x=x-1\approx 0,\vartriangle x\neq 0$.

במקרה זה $e^{\frac{1}{\vartriangle x}}$ מספר אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר והגבול מימין ב-$x=1$ לא קיים ולכן $x=1$ נקודת אי רציפות **מסוג שני**.

ד. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

פתרון:

$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. בכל הנקודות של תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב-$x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x}=(\sin x)'\Big|_{x=0}=\cos 0=1$$

הגבול בנקודה $x=0$ קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה זו ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות **סליקה**.

שימו לב: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ **זהו גבול חשוב ושימושי לחישוב גבולות אחרים.**

6. בדקו האם הפונקציה הבאה רציפה ב- $x=1$? האם היא גזירה ב- $x=1$?

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2x & x>1\\ 3x & x\le 1\end{cases}$$

פתרון: הפונקציה רציפה ב- $x=1$, כי

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^3+2x\right)=3=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}3x=f(1)$.

נבדוק האם הפונקציה גזירה ב- $x=1$.

$$\lim_{\vartriangle x\to 0^+}\frac{f(1+\vartriangle x)-f(1)}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0^+}\frac{(1+\vartriangle x)^3+2(1+\vartriangle x)-3}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0^+}\frac{3\vartriangle x+3\vartriangle x^2+\vartriangle x^3+2\vartriangle x}{\vartriangle x}$$
$$=\lim_{\vartriangle x\to 0^+}\left(5+3\vartriangle x+\vartriangle x^2\right)=5$$
$$\lim_{\vartriangle x\to 0^-}\frac{f(1+\vartriangle x)-f(1)}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0^-}\frac{3(1+\vartriangle x)-3}{\vartriangle x}=3$$

הגבולות החד צדדיים שונים ולכן $\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{f(1+\vartriangle x)-f(1)}{\vartriangle x}$ לא קיים ולכן הפונקציה לא גזירה ב- $x=1$.