אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 10

1. חשבו את הע"ע והו"ע של המטריצות הבאות:

(א) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

פתרון:

נחשב את הע"ע: $\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(3-\lambda)$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

נחשב ו"ע:

עבור $\lambda_1=2$ נפתור את $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ נקבל שהו"ע המתאימים ל2 הם $t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}$ לכל $t\neq0$.

עבור $\lambda_2=3$ נפתור את $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ נקבל שהו"ע המתאימים ל3 הם $t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$ לכל $t\neq0$.

(ב) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

פתרון:

נחשב את הע"ע: $\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&1\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

נחשב ו"ע:

עבור $\lambda_1=1$ נפתור את $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ נקבל

שהו"ע המתאימים ל0 הם $t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}$ לכל $t\neq 0$.

עבור $\lambda_2=2$ נפתור את $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

נקבל שהו"ע המתאימים ל2 הם $t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\0\end{pmatrix}$ לכל $t\neq 0$.

עבור $\lambda_3=0$ נפתור את $\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

נקבל שהו"ע המתאימים ל0 הם $t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t\\2t\end{pmatrix}$ לכל $t\neq 0$.

(ג) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$

פתרון:

נחשב את הע"ע: $(-1-\lambda)^2=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\0&-1-\lambda\end{vmatrix}$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1=-1$.

נחשב ו"ע:

עבור $\lambda_1=-1$ נפתור את $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ נקבל שהו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ לכל $t\neq 0$.

(ד) $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}$

פתרון:

נחשב את הע"ע: $\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\3&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)-3=\lambda^2-1-3=(\lambda-2)(\lambda+2)$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$.

נחשב ו"ע:

עבור $\lambda_1=2$ נפתור את $\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}-1&1\\3&-3\end{pmatrix}$ נקבל שהו"ע המתאימים הם $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$ לכל $t\neq 0$.

עבור $\lambda_1=-2$ נפתור את $\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix}$ נקבל שהו"ע המתאימים הם $t\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\3t\end{pmatrix}$ לכל $t\neq 0$. (מי שכותב $t\begin{pmatrix}-1/3\\1\end{pmatrix}$ זה כמובן גם בסדר).

2. עבור המטריצות הבאות, מצאו מטריצה P הפיכה ומטריצה D אלכסונית כך ש

$A = PDP^{-1}$:

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון:

חישבנו את הע"ע והו"ע ולכן $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ו $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ב) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

פתרון:

חישבנו את הע"ע והו"ע ולכן $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(ג) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

יש לחשב ע"ע וו"ע:

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda-6)$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$.

הו"ע המתאים ל $\lambda_1 = 2$: יש לפתור את $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

הו"ע הם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ לכל $t \neq 0$.

הו"ע המתאים ל $\lambda_1 = 6$: יש לפתור את $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

הו"ע הם $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$ לכל $t \neq 0$.

עכשיו נוכל לומר ש $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(ד) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון:

יש לחשב ע"ע וו"ע:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$.

הו"ע המתאים ל $\lambda_1 = 0$: יש לפתור את $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

הו"ע הם $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$ לכל $t \neq 0$.

הו"ע המתאים ל $\lambda_1 = 3$: יש לפתור את $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

הו"ע הם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ לכל $t \neq 0$.

עכשיו נוכל לומר ש $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. חשבו את A^{15} עבור המטריצות:

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{aligned} A^{15} &= \left(PDP^{-1}\right)^{15} = PD^{15}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{15} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+2^{15} & -1+2^{14} \\ 0 & 2^{15} & 2^{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ב) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

פתרון:

צריך למצוא ע"ע וו"ע:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda)+8 = (\lambda-1)(\lambda+1)$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

עבור $\lambda_1 = 1$ צריך לפתור את $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, הו"ע הם $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$ לכל $t \neq 0$.

עבור $\lambda_2 = -1$ צריך לפתור את $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, הו"ע הם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ לכל $t \neq 0$.

$$\begin{aligned} A^{15} &= \left(PDP^{-1}\right)^{15} = PD^{15}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$