תרגיל 8 – מתמטיקה לכימאים ג'

חלק א' - טורי טיילור

1. פתחו את הפונקציות הבאות לטורי טיילור סביב הנקודות הנתונות

1.1 $f(x)=(1+x^2)\cos x$ סביב $x=0$.
1.2 $f(x)=(x+1)e^x$ סביב $x=-2$.

2. היעזרו בפיתוח מקלורן של $f(x)=e^x$ למציאת הקירובים הבאים:

2.1 קירוב ל $\frac{1}{e}$ בדיוק של 10^{-5}.
2.2 קירוב e^{-3} בדיוק של 0.01.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1 מצאו את טור טיילור של $f(x)=\frac{1}{x}$ סביב $x=1$. מהו תחום התכנסותו?
3.2 מצאו את טור טיילור של $f(x)=\ln x$ סביב $x=1$. מהו תחום התכנסותו?
רמז: כאשר עושים אינטגרציה לטור חזקות סביב a מומלץ לעשות את האינטגרציה מ a עד x. (לדוגמה, כשעשינו אינטגרציה לטור חזקות סביב 0, האינטגרלים היו מ 0 עד x).
3.3 חשבו $\ln 2$ בקירוב של $\frac{1}{6}$.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1 מצאו את טור מקלורן של $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. מהו תחום התכנסותו?
4.2 מצאו את טור מקלורן של $f(x)=\arctan x$. מהו תחום התכנסותו?
4.3 חשבו את הערך של π בדיוק של 0.2. (רמז: $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$).

חלק ב' – מד"ר

הערה: כאשר מחפשים פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ למד"ר כלשהי ונתונים תנאי התחלה:

$$y(0)=a$$
$$y'(0)=b$$

המשמעות היא שבפתרון:

$$a_0 = y(0) = a$$
$$a_1 = y'(0) = b$$

כלומר תנאי ההתחלה נותנים לנו את האיברים a_0, a_1 של הטור. כפי שראינו בכיתה, במצב זה, כלל הנסיגה נותן לנו את הערך של שאר המקדמים בטור ולכן, מתקבל פתרון ספציפי (ללא קבועים), בדיוק כפי שהיינו מצפים לקבל במקרה שנתונים לנו תנאי התחלה.
אי"ה אנחנו נסביר את זה בשיעור הבא, אבל אתם יכולים להשתמש בזה כבר בתרגילים הבאים.

מכיוון שהתרגיל הפעם מעט ארוך, **שאלות 8 ו 9 אינן להגשה**. כמובן, מומלץ לפתור אותן (לפחות לפני המבחן) לצורך תרגול נוסף.

5. למשוואה $y''-x^2y'+xy=0$ פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.1 מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

5.2 בהינתן $y'(0)=3, y(0)=2$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

6. עבור המד"ר $y''-2xy'+y=0$ בסביבת הנקודה $x=0$:

6.1 קבעו אם קיים למד"ר פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

6.2 מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

6.3 בהינתן $y'(0)=5, y(0)=-1$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

7. עבור המד"ר $(1+x^2)y''+2xy'=0$ בסביבת הנקודה $x=0$.

7.1 קבעו אם הנקודה $x=0$ היא נקודה רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

7.2 נתון כי $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא פתרון למד"ר הנתונה. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

7.3 בהינתן $y'(0)=3, y(0)=0$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

8. עבור המד"ר $y''+x^2y=0$:

8.1 קבעו אם קיים למד"ר פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

8.2 מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

8.3 בהינתן $y'(0)=0, y(0)=1$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

9. עבור המד"ר $y''-2xy=0$.

9.1 קבעו אם הנקודה $x=0$ היא רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

9.2 נתון כי $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא פתרון למד"ר הנתונה. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

9.3 בהינתן $y(0)=0$, $y'(0)=3$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

בהצלחה! ☺