מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 9 - פתרון

1. יהי X מ"ט קומפקטי ו- $f\colon X \to \mathbb{R}$ רציפה.
<u>הוכיחו</u> שקיימים $x_1, x_2 \in X$ כך
ש- $f(x_1) = \min\{f(x)\}|\ x \in X\}$
ו- $f(x_2) = \max\{f(x)\}|\ x \in X\}$.

<u>הוכחה</u>

הקבוצה $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית כתמונה של מרחב קומפקטי תחת פונקציה רציפה. לכן $f(X)$ סגורה כי $\mathbb{R}$ מ"ט האוסדורף.
היא גם חסומה כקבוצה קומפקטית במרחב מטרי.
לכל קבוצה חסומה ב-$\mathbb{R}$ ישנם $\sup$ ו- $\inf$ (סופיים).
כלומר קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ ו- $b = \sup\limits_{x\in X} f(x)$.
אם $a = b$ אז לכל $x \in X$ מתקיים: $a = b \leq f(x) \leq a = b$
והכל הוכח.
אם $a < b$ אפשר להוכיח ש-$a, b \in f(X)$ כי ש-$f(X)$ סגורה.
==========================
(אכן: אם נניח – <u>בשלילה</u> – ש-$a \notin f(X)$ אז $a \in f(X)^c$.
$f(X)^c$ קבוצה פתוחה, לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך
ש-$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq f(X)^c \Leftrightarrow (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap f(X) = \emptyset$.
אבל לפי הגדרת $\inf$, $a+\varepsilon$ אינו חסם של $f(X)$ מלרע,
כלומר, קיים $x_0 \in X$ כך ש- $a \leq f(x_0) < a+\varepsilon$. <u>סתירה</u>.
בדיוק באותה דרך מוכיחים ש-$b \in f(X)$)

========================

זה אומר שקיימים $x_1, x_2 \in X$ כך ש- $f(x_1) = a, f(x_2) = b$ או במילים אחרות:
$f(x_1) = \min\{f(x)\}|\ x \in X\}$ ו- $f(x_2) = \max\{f(x)\}|\ x \in X\}$,
מש"ל.

2. יהיו X,Y מ"ט לא ריקים. הוכיחו ש- $X\sqcup Y$ מ"ט לא קשיר.

<u>הוכחה</u>
כמו שנאמר בהרצאה המרחבים X,Y מוכלים ב-$X\sqcup Y$ כתת קבוצות זרות ופתוחות כך שאיחודן שווה ל-$X\sqcup Y$ כולו.
לפי התנאי הן גם אינן ריקות. לכן $X\sqcup Y$ אינו קשיר,מש"ל.

3. יהיו $X_1, \dots, X_n$ מרחבים קומפקטיים זרים.
הוכיחו ש-$X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ מרחב קומפקטי.

<u>הוכחה</u>
אפשר לראות את המ"ט $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ כ- $\dot\bigcup_{i=1}^{n} X_i'$ כאשר X_i' תת-מרחב הומאומורפי ל-X_i ולכן גם קומפקטי. בנוסף, X_i' - קבוצה פתוחה ב-$X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$.
נשאר להוכיח שאחוד סופי של תת-מרחבים קומפקטיים.
מספיק לעשות את זה לשני מרחבים כי לאחר מכן קל להמשיך לפי אינדוקציה.
יהי $Z = X\dot\cup Y$. יהיו X,Y קבוצות קומםקטיות ויהי $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של Z . אז הוא גם כיסוי פתוח של X ושל Y (ככיסוי של תת-קבוצות) . לכן הוא מכיל כיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha\in F_1}$ של X וכיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha\in F_2}$ של Y ($F_1, F_2 \subseteq I$ – קבוצות אינדקסים סופיות). אזי $\{W_\alpha\}_{\alpha\in F_1\cup F_2\subseteq I}$ תת כיסוי סופי של Z . לכן Z קומפקטי.
בעזרת אותה לוגיקה מקבלים באינדוקציה ש-
$X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n = \dot\bigcup_{i=1}^{n} X_i'$ מ"ט קומפקטי, מש"ל.

4. כידוע ספרה $n-1$-מימדית $S^{n-1}(a,r)$ ב-$\mathbb{R}^n$
עם מרכז $a \in \mathbb{R}^n$ ורדיוס $r > 0$ היא

קבוצה $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| = r\}$, כאשר $||\cdot||$ נורמה אוקלידית ב-$\mathbb{R}^n$.
<u>הוכיחו</u> שכל ספרות $n-1$-מימדיות הומאומורפיות.
(רמז. הוכיחו שכל ספרה הומאומורפית לספרה $S^{n-1}(O,1)$ כאשר O – ראשית הצירים.)

<u>הוכחה</u>
נגדיר שתי פונקציות $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
כך ש- $f\big((x_1, \dots, x_n)\big) = (a_1 + rx_1, \dots, a_n + rx_n)$
לכל $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
ו- $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
כך ש- $g\big((y_1, \dots, y_n)\big) = (\frac{y_1-a_1}{r}, \dots, \frac{y_n-a_n}{r})$
לכל $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
נסמן: $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך
ש- $f_1(x) = a_1 + rx_1, \dots, f_n(x_n) = a_n + rx_n$
ו- $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך
ש- $g_1(y_1) = \frac{y_1-a_1}{r}, \dots, g_n(y_n) = \frac{y_n-a_n}{r}$.
אזי רואים (לפי הגדרות)
ש- $f = f_1 \times \dots \times f_2$
ו- $g = g_1 \times \dots \times g_2$.
כל הפונקציות $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ רציפות כסכומים ומכפלות (במובן אריתמטי) של פונקציות רציפות. לכן גם פונקציות f, g <u>רציפות</u> (משפט מההרצאה).
חוץ מזה, אפשר לבדוק ישורות
ש- $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ ו- $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^n}$. (****)

נוכיח שספרה $S^{n-1}(O,1)$ הומאומורפית לספרה $S^{n-1}(a,r)$.
יהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}(O,1)$. אזי
$$\|x\| = 1 \Rightarrow \|f(x) - a\| = r$$
(אכן
$$\|f(x) - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + x_i r - a_i)^2} = r\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = r)$$
כלומר $x \in S^{n-1}(O,1) \Rightarrow f(x) \in S^{n-1}(a,r)$
או $\boldsymbol{f\left(S^{n-1}(O,1)\right) \subseteq S^{n-1}(a,r)}$.
בדיוק באותה דרך נקבל
ש- $\boldsymbol{g\left(S^{n-1}(a,r)\right) \subseteq S^{n-1}(O,1)}$.
לכן אם נעבור לצמצומים אז מ- (****) נקבל:
$$g|_{S^{n-1}(a,r)} \circ f|_{S^{n-1}(O,1)} = Id_{S^{n-1}(O,1)}$$
ו- $f|_{S^{n-1}(O,1)} \circ g|_{S^{n-1}(a,r)} = Id_{S^{n-1}(a,r)}$.
כיוון שצמצומים של פונקציות רציפות בעצמם רציפים, הוכחנו שהספרות $S^{n-1}(O,1)$ ו- $S^{n-1}(a,r)$ הומאומורפיות.
הספרה $S^{n-1}(a,r)$ היא ספרה אקראית, לכן זה גורר שכל ספרות $n-1$ - מימדיות הומאומורפיות זו לזו, מש"ל.

5. תהי $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ מערכת משוואות לינאריות מעל $\mathbb{R}$.
<u>הוכיחו</u> שקבוצת הווקטורים $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ שמהווים פתרונות של המערכת היא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^n$.

<u>הוכחה</u>
לכל $1 \le i \le m$ נסמן ב- $L_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ את ההעתקה:
$L_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$.

את הנוסחה אפשר לשכתב בצורה:

$$L_i(x) = a_{i1}p_1(x) + \cdots + a_{in}p_n(x)$$

כאשר p_j היא ההטלה של $\mathbb{R}^n$ לגורם מס' j. אזי $L_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא ההרכבה של כמה פונקציות הטלה, מכפלה (אריתמטית) וסכום, שרציפותן הוכחה בהרצאה. לכן $L_i(x)$ רציפה.

את קבוצת הפתרונות S_i של המשוואה $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ אפשר להציג כ-$L_i^{-1}(\{b_i\}) \subset \mathbb{R}^n$, כלומר, כתמונה הפוכה של קבוצה סגורה $\{b_i\} \subset \mathbb{R}$ תחת הפונקציה הרציפה L_i. לכן S_i סגורה.

ולבסוף: קבוצת הפתרונות של כל המערכת היא חיתוך $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ של m קבוצות סגורות ואז גם קבוצה סגורה, מש"ל.

6. יהי $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ פולינום עם מקדמים ממשיים, יהי X מרחב טופולוגי ותהא $f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נסמן: $g \coloneqq P \circ f$. <u>הוכיחו</u> ש-g פונקציה רציפה.

<u>הוכחה</u>

נוכיח קודם ש-$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

<u>הוכחה באינדוקציה.</u>

$\underline{n = 0}$. $P(x) = a_0$ - רציפה כפונקציה קבועה.

<u>נניח שפולינום שהחזקה שלו n רציף.</u>

אזי $a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_0 = x \cdot (a_{n+1}x^n + \cdots + a_1) + a_0$ והפולינום החדש שחזקתו $n + 1$ רציף כהרכבת מכפלה (אריתמטית) וסכום של פונקציות רציפות.

לכן P רציפה, אזי $g = P \circ f$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות, מש"ל.