תרגיל בית 9

שאלה 1

פתרו בעזרת שיטת הפרדת המשתנים את המשוואות הבאות:

א. $2ydx - xdy = 0$.

ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$.

ג. $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$.

ד. $\left(xy + x\right)dx = \left(x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1\right)dy$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$2ydx - xdy = 0 \Rightarrow 2ydx = xdy \Rightarrow \frac{1}{2y}dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln\left(cy\right) \Rightarrow y = \frac{x^2}{c}.$$

סעיף ב

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^{y}} \Rightarrow \left(x - e^{-x}\right)dx = \left(y + e^{y}\right)dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c = \frac{y^2}{2} + e^{y}.$$

סעיף ג

$$y' = \cos^2 x \cos^2 2y \Rightarrow \cos^2 x dx = \frac{dy}{\cos^2 2y} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c = \frac{1}{2}\tan 2y.$$

סעיף ד

$$\left(xy + x\right)dx = \left(x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1\right)dy \Rightarrow x\left(y+1\right)dx = \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)dy \Rightarrow \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{\left(y^2+1\right)dy}{y+1}$$

נחשב $\int \frac{x}{x^2+1}dx$. נציב $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{2\left(t+1\right)}dt = \frac{1}{2}\ln\left|t+1\right| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).$$

נחשב $\int \frac{\left(y^2+1\right)dy}{y+1}$.

$$\frac{y^2+1}{y+1} = \frac{\left(y+1\right)^2 - 2\left(y+1\right) + 2}{y+1} = y + 1 - 2 + \frac{2}{y+1} = y - 1 + \frac{2}{y+1}$$

$$\int \frac{\left(y^2+1\right)dy}{y+1} = \int\left(y - 1 + \frac{2}{y+1}\right)dy = \frac{y^2}{2} - y + 2\ln\left|y+1\right|.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \frac{y^2}{2} - y + 2\ln\left|y+1\right| + c.$$

שאלה 2

פתרו את המשוואות ההומוגניות הבאות:

א. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$.

ב. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$.

ג. $2x^3 y' = y\left(y^2 + 3x^2\right)$.

ד. $y' = \frac{\left(1+y\right)^2}{x\left(y+1\right) - x^2}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u$

$$\frac{2udu}{1+u^2}=\frac{dx}{x}\Leftarrow u'x=\frac{1+u^2}{2u}\Leftarrow u'x+u=\frac{1+3u^2}{2u}\Leftarrow u'x+u=\frac{x^2+3u^2x^2}{2x\cdot ux}$$

$$1+\frac{y^2}{x^2}=cx\Leftarrow \ln\left(1+u^2\right)=\ln\left(cx\right)$$

<u>סעיף ב</u>

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u$

$$y'=\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2}$$

$$u'x=1+2u+u^2\Leftarrow u'x+u=1+3u+u^2\Leftarrow u'x+u=\frac{x^2+3x\cdot ux+u^2x^2}{x^2}$$

$$-\frac{x}{x+y}=\ln cx\Leftarrow -\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=\ln cx\Leftarrow -\frac{1}{1+u}=\ln cx\Leftarrow \frac{du}{\left(1+u\right)^2}=\frac{dx}{x}$$

<u>סעיף ג</u>

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u$

$$2x^3y'=y\left(y^2+3x^2\right)$$

$$u'x=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u\Leftarrow u'x+u=\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u\Leftarrow u'x+u=\frac{u^3x^3+3ux\cdot x^2}{2x^3}\Leftarrow y'=\frac{y^3+3yx^2}{2x^3}$$

$$\frac{2du}{u^3+u}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{u\cdot\left(u^2+1\right)}=\frac{2}{u}-\frac{2u}{u^2+1}$$

$$\int\frac{2du}{u^3+u}=\int\frac{2du}{u}-\int\frac{2udu}{u^2+1}=\ln u^2-\ln\left(u^2+1\right)=\ln\frac{u^2}{u^2+1}$$

$$.\frac{y^2}{y^2+x^2}=cx\Leftarrow\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}+1}=cx\Leftarrow\ln\frac{u^2}{u^2+1}=\ln cx\Leftarrow\int\frac{2du}{u^3+u}=\int\frac{dx}{x}$$

<u>סעיף ד</u>

$$y'=\frac{\left(1+y\right)^2}{x\left(y+1\right)-x^2}$$

נציב $t=1+y\Rightarrow t'=y'$

$$.t'=\frac{t^2}{xt-x^2}$$

נציב $t=ux$ ואז $t'=u'x+u$

$$\frac{\left(u-1\right)du}{u}=\frac{dx}{x}\Leftarrow u'x=\frac{u}{u-1}\Leftarrow u'x+u=\frac{u^2}{u-1}\Leftarrow u'x+u=\frac{u^2x^2}{x\cdot ux-x^2}$$

$$\frac{e^u}{u}=cx\Leftarrow\ln\frac{e^u}{u}=\ln cx\Leftarrow u-\ln u=\ln cx\Leftarrow\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$$

הצבנו $t=ux$, $t=1+y$ ז"א $u=\frac{1+y}{x}$.

הפתרון הוא $\frac{xe^{\frac{1+y}{x}}}{1+y}=cx$.

<u>שאלה 3</u>

פתרו את המשוואות הליניאריות הבאות:

א. $y'+\frac{1}{x}y=3\cos(2x)$.

ב. $y'+3y=x+e^{-2x}$.

ג. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}$.

ד. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y'+\frac{1}{x}y=0$.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=-\ln x+\ln c \Rightarrow y=\frac{c}{x}\ .$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y'+\frac{1}{x}y=3\cos(2x)$ $y=\frac{c(x)}{x}$.

$$3\cos(2x)=\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2} \Rightarrow c'(x)=3x\cos 2x\ .$$

נפתור את האינטגרל $\int 3x\cos 2xdx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים

$u=3x$ $\quad v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$u'=3$ $\quad v'=\cos 2x$

$$\int 3x\cos 2xdx=\frac{3x\sin 2x}{2}-\int\frac{3\sin 2x}{2}dx=\frac{3x\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4}\ .$$

סה"כ קיבלנו ש $c(x)=\frac{3x\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4}$ והפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית

$y_p=\frac{3\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4x}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית $y=\frac{c}{x}+\frac{3\sin 2x}{2}+\frac{3\cos 2x}{4x}$.

<u>סעיף ב</u>

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y'+3y=0$.

$$\frac{dy}{dx}+3y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-3dx \Rightarrow \ln y=-3x+\ln c \Rightarrow y=\frac{c}{e^{3x}}\ .$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y'+3y=x+e^{-2x}$ $y=\frac{c(x)}{e^{3x}}$.

$$\frac{c'(x)}{e^{3x}}+\frac{-3c(x)}{e^{3x}}+\frac{3c(x)}{e^{3x}}=x+e^{-2x} \Rightarrow c'(x)=xe^{3x}+e^{x} \Rightarrow c(x)=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+e^{x}\ .$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+e^{-2x}$.

פתרון כללי של הלא הומוגנית $y=\frac{c}{e^{3x}}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{e^{2x}}$.

סעיף ג

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y'+\frac{2}{x}y=0$.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln y=-2\ln x+\ln c \Rightarrow y=\frac{c}{x^2}.$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}$ $y=\frac{c(x)}{x^2}$.

$$\frac{x^2c'(x)-2xc(x)}{x^4}+\frac{2c(x)}{x^3}=\frac{\cos x}{x^2} \Rightarrow c'(x)=\cos x \Rightarrow c(x)=\sin x.$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p=\frac{\sin x}{x^2}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית

$$y=\frac{c}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}.$$

סעיף ד

$$y'=\frac{y}{3x-y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x-y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{3x-y^2}{y} \Rightarrow x'-\frac{3}{y}x=-y.$$

נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה $x'-\frac{3}{y}x=0$.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{3dy}{y} \Rightarrow \ln x=3\ln y+\ln c \Rightarrow x=cy^3.$$

נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית נציב במשוואה $x'-\frac{3}{y}x=-y$ $x=c(y)y^3$.

$$c'(y)y^3+3c(y)y^2-3c(y)y^2=-y \Rightarrow c'(y)=-\frac{1}{y^2} \Rightarrow c(y)=\frac{1}{y}.$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית $y_p=\frac{1}{y}$. פתרון כללי של הלא הומוגנית $x=cy^3+\frac{1}{y}$.

שאלה 4

פתרו את משוואות ברנולי הבאות:

א. $x^2y'+2xy-y^3=0$.

ב. $y'+2y=y^2e^x$.

פתרון שאלה 4

סעיף א

$$x^2y'+2xy-y^3=0 \Rightarrow \frac{x^2y'}{y^3}+\frac{2x}{y^2}=1.$$

נציב $t=\frac{1}{y^2} \Rightarrow t'=\frac{-2y'}{y^3}$.

$$-\frac{x^2}{2}t'+2xt=1 \Rightarrow t'-\frac{4}{x}t=\frac{-2}{x^2}$$ קיבלנו משוואה ליניארית.

נפתור את המשוואה ההומוגנית $t'-\frac{4}{x}t=0 \Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{4}{x}t \Rightarrow \frac{dt}{t}=\frac{4}{x}dx \Rightarrow \ln t=4\ln x+\ln c$.

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $t=cx^4$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $t=c(x)x^4$ במשוואה $t'-\frac{4}{x}t=\frac{-2}{x^2}$.

$.\ c(x)=\frac{2}{5x^5} \Leftarrow c'(x)=\frac{-2}{x^6} \Leftarrow c'(x)x^4+4x^3c(x)-4x^3c(x)=\frac{-2}{x^2}$

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית $t=\frac{2}{5x}$.

פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית $.\ \frac{1}{t}=\frac{5x}{5cx^5+2} \Leftarrow t=\frac{5cx^5+2}{5x} \Leftarrow t=cx^4+\frac{2}{5x}$

פתרון המשוואה: $y^2=\frac{5x}{5cx^5+2}$.

<u>סעיף ב</u>

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{y}=e^x \Leftarrow y'+2y=y^2e^x$$

נציב $.\ t'=\frac{-y'}{y^2} \Leftarrow t=\frac{1}{y}$

$-t'+2t=e^x \Rightarrow t'-2t=-e^x$ קיבלנו משוואה ליניארית.

נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$.\ t=ce^{2x} \Leftarrow \ln t=2x+\ln c \Leftarrow \frac{dt}{t}=2dx \Leftarrow \frac{dt}{dx}=2t \Leftarrow t'-2t=0$$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $t=ce^{2x}$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $t=c(x)e^{2x}$ במשוואה $t'-2t=-e^x$.

$$.\ c(x)=e^{-x} \Leftarrow c'(x)=-e^{-x} \Leftarrow c'(x)e^{2x}+2c(x)e^{2x}-2c(x)e^{2x}=-e^x$$

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית $t=e^x$.

פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית $.\ y=\frac{1}{ce^{2x}+e^x} \Leftarrow t=ce^{2x}+e^x$

פתרון המשוואה: $y=\frac{1}{ce^{2x}+e^x}$.

<u>שאלה 5</u>

פתרו את בעיות ההתחלה הבאות:

א. $\begin{cases} y'=\frac{x}{y} \\ y(0)=1 \end{cases}$.

ב. $\begin{cases} y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy=\arcsin x dx \\ y(0)=0 \end{cases}$.

ג. $\begin{cases} (3xy+3y-4)dx+(x+1)^2dy=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>

נמצא פתרון כללי למשוואה $y^2=x^2+c \Leftarrow ydy=xdx \Leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \Leftarrow y'=\frac{x}{y}$

$$.\ y=\sqrt{x^2+1} \Leftarrow y=\sqrt{x^2+c}$$

<u>סעיף ב</u>

$$.\ \frac{y^3}{3}=\frac{\arcsin^2 x}{2} \Leftarrow \frac{y^3}{3}=\frac{\arcsin^2 x}{2}+c \Leftarrow y^2dy=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

סעיף ג

$$y'=\frac{-3xy-3y+4}{(x+1)^2} \Leftarrow (3xy+3y-4)dx=-(x+1)^2dy \Leftarrow (3xy+3y-4)dx+(x+1)^2dy=0$$

$$y'+\frac{3}{x+1}y=\frac{4}{(x+1)^2} \Leftarrow y'=\frac{-3y(x+1)+4}{(x+1)^2}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית.

נמצא תחילה פתרון למשוואה ההומוגנית

$$y=\frac{c}{(x+1)^3} \Leftarrow \ln y=-3\ln(x+1)+\ln c \Leftarrow \frac{dy}{y}=\frac{-3dx}{x+1} \Leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3y}{x+1} \Leftarrow y'+\frac{3}{x+1}y=0$$

.

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נציב $y=\frac{c(x)}{(x+1)^3}$ במשוואה $y'+\frac{3}{x+1}y=\frac{4}{(x+1)^2}$.

$$.\ c(x)=2x^2+4x \Leftarrow c'(x)=4x+4 \Leftarrow \frac{c'(x)}{(x+1)^3}-\frac{3c(x)}{(x+1)^4}+\frac{3c(x)}{(x+1)^4}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

פתרון פרטי ללא הומוגני $y=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^3}$.

פתרון כללי ללא הומוגני $y=\frac{2x^2+4x+c}{(x+1)^3}$. נתון ש $y(0)=1 \Rightarrow c=1$.

$$.\ y=\frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^3}$$