

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 4: משפט נתר, משוואות המילטון כמערכת דינמית, סוגרי פואסון ומערכות ייחוס מסתובבות

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה. האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת מדוע ?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$.

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו ?

(ה) חזרו על סעיף (ג) עבור פוטנציאל $U(r)$ כלשהוא. (רמז: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

2. חרוז בעל מסה m מאולץ לנוע על חישוק חסר מסה עם רדיוס R . החרוז מחובר לנקודה $(R, 0)$ באמצעות קפיץ בעל קבוע k עם אורך שווי משקל ℓ . המרחק בין החרוז לנקודה $(R, 0)$ הינו x .

(א) הראו כי הלגרנג'יאן נתון ע"י

$$\mathcal{L} = mR^2\dot{\theta}^2(3 + \cos\theta)/4 - mR^2\omega^2(2\sin(\theta/2) - \ell/R)^2/2 - mR^2\Omega^2\cos\theta,$$

כאשר $\omega^2 = k/m, \Omega^2 = g/R$. (רמז: בטאו את x באמצעות (R, θ)).

(ב) רשמו את ההמילטוניאן.

(ג) רשמו את משוואות המילטון.

(ד) מצאו את נקודות שווי המשקל כאשר ידוע כי $\ell = R/2$. מהו התנאי לכך שתתקבל נקודת שווי משקל לא טריוויאלית ?

3. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. נציג כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right), a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$. סוגרי

פואסון עבור שתי פונקציות $f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$ מקיימים $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$.

(א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a^*, \mathcal{H}\}, \{a, \mathcal{H}\}, \{a, a^*\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות (ד). השוו לחישוב הישיר

4. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ (ביחס לאופק) ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של כדור"א Ω .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת (הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת ביחס למערכת האינרציאלית $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ כאשר $\vec{v}' = \dot{x}\hat{e} + \dot{y}\hat{n}$ והזניחו איברים $\mathcal{O}(\Omega^2)$. השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $\ell^2\theta^2 \approx x^2 + y^2$

(ב) כתבו את משוואות אויילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.

(ג) מצאו את התנעים הקנוניים ורשמו את ההמילטוניאן $\mathcal{H}(\Omega)$

(ד) הראו כי $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(0) - L\Omega \sin \lambda$ כאשר L התנע הזוויתי. מה המשמעות של $\mathcal{H}(0)$?

(ה) הראו כי התנע הזוויתי נשמר ע"י שימוש בקשר שקיבלתם בסעיף (ד) ובאמצעות סוגרי פואסון.