אביב תש"ף

# פיסיקה למתמטיקאים

## תרגיל 3: משוואות אויילר לגראנג'

1. *The brachistochrone problem* בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה $(x_1, y_1)$ לנקודה $(x_2, y_2)$ לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה $x(\phi) = -a(\phi - \sin\phi), y(\phi) = a(1 - \cos\phi),\ a < 0$).
   (א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה
   (ב) הניחו פרמטריציה $\phi(t) = \{0 \le t \le t_{1,2}^{cyc};\ \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$ וחשבו את $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$
   (ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

2. הראו כי $t_{1,2}^{cyc}$ כאשר נוסעים מנקודה $(x_1, y_1)$ למינימום של הציקלואידה $(-\pi a, 2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה $(x_1, y_1)$
(רמז: קבלו משימור אנרגיה את האינטגרל $\int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}} d\phi = \pi$, כאשר $\phi_0$ הזוית בנקודת ההתחלה.

3. גוף נע על פני המישור הדו־ממדי $(r, \theta)$ תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r) = Ce^{-\alpha r}$.
   (א) רשמו את הלגראנג'ין של המערכת
   (ב) קבלו את משוואות התנועה
   (ג) מהו התנע הזויתי? הראו כי הוא נשמר
   (ד) ב $t = 0$ מצב הגוף נתון ע"י

$$\begin{aligned} r(t=0) &= r_0, \\ \dot{r}(t=0) &= 0, \\ \dot{\theta}(t=0) &= \omega. \end{aligned}$$

   מה יהיה מצב הגוף $(r, \dot{r}, \dot{\theta})$ כאשר $t \to \infty$ ?

4. שני מוטות חסרי מסה באורך $2r$ כל אחד מחוברים בקצותיהם. מסה $m$ מקובעת באמצע כל אחד מן המוטות. המוט התחתון מוחזק אנכית, וקצהו מחובר לקרקע. המוט העליון מוסט בזוית $\epsilon$ ביחס למוט האנכי (איור $a$). מצאו את התאוצות הזויתיות ברגע בו משחררים את המוטות ממנוחה. (הניחו כי $\epsilon << 1$, רשמו את מיקומי המסות כמתואר באיור $b$ והשתמשו בקרוב זויות קטנות).