פתרון מבחן מועד א – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 13/02/20

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^{10})\ln(1+x)}{\cos(\sin(x))\left(1-\cos(5x)\right)^5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^{10})\ln(1+x)}{\cos(\sin(x))\left(1-\cos(5x)\right)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^{10})}{x^{10}}\cdot\left(\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}\right)^5\cdot\ln(1+x)\cdot\frac{1}{5^{10}\cos(\sin(x))}=1\cdot 2^5\cdot 0\cdot\frac{1}{5^{10}\cdot 1}=0$$

ב. $\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\frac{1}{x-e}}$

כיוון שבסיס החזקה שואף ל1, נובע כי

$$\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\frac{1}{x-e}}=e^{\lim_{x\to e}(\ln(x)-1)\frac{1}{x-e}}=e^{\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}}=e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}=\frac{0}{0},\text{לופיטל}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{e}}{1}=\frac{1}{e}$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^{(n^2)}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^{(n^2)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e^n}\right)^n=0^\infty=0$$

2.

א. חשבו את $\int sin^4(x)\cos(x)dx$.

$$\int sin^4(x)\cos(x)dx=\left\{\begin{matrix}t=\sin(x)\\ dt=\cos(x)\,dx\end{matrix}\right\}=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{(\sin(x))^5}{5}+C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס dx $\int_1^\infty \frac{x+\sin(x)}{x^2+2}$.

ראשית נשים לב שמדובר בפונקציה חיובית בתחום, כיוון ש$x+\sin(x) \geq 0$ עבור $x \geq 1$, ולכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

נבצע השוואה עם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$.

נחלק את הפונקציות ונשאיף לנק' הבעייתית:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x \cdot \sin(x)}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

לכן האינטגרלים חברים, וכיוון שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ מתבדר, גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{x+\sin(x)}{x^2+2} dx$ מתבדר.

3.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים כי $4xln(x) - 8x + 4e \geq 0$.

נביט בפונקציה $h(x) = 4xln(x) - 8x + 4e$, ונחקור אותה.

הנגזרת הינה $h'(x) = 4\ln(x) + 4 - 8 = 4(\ln(x) - 1)$.

לכן הנגזרת שלילית בתחום $(0, e)$ וחיובית בתחום (e, ∞).

כלומר הפונקציה h יורדת עד $x = e$ ועולה אחריו, ולכן $h(e)$ היא הנקודה הנמוכה ביותר בגרף הפונקציה.

אכן ע"י הצבה נקבל כי $h(e) = 0$ ולכן בכל תחום ההגדרה (לכל $x > 0$) מתקיים כי $h(x) \geq 0$.

ב. קבעו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון יחיד למשוואה $2x^2\ln(x) - 5x^2 + 4ex = a$, הוכיחו תשובתכם.

ראשית נעביר אגף ונבנה פונקציה $g(x) = 2x^2\ln(x) - 5x^2 + 4ex - a$, ונחקור אותה על מנת למצוא חיתוך עם ציר האיקס.

הנגזרת הינה $g'(x) = 4x\ln(x) + 2x - 10x + 4e = 4xln(x) - 8x + 4e$ שזה (הפלא ופלא!) בדיוק הפונקציה מסעיף א'.

כלומר הנגזרת גדולה או שווה לאפס (ומתאפסת בנק' אחת בלבד) ולכן הפונקציה g עולה ממש בתחום הגדרתה.

עד כה גילינו שיש לפונקציה לכל היותר חיתוך אחד עם ציר איקס, ללא תלות בערך הפרמטר $a \in \mathbb{R}$.

כעת נבדוק לאילו ערכי הפרמטר קיים חיתוך עם ציר האיקס, ולכן חיתוך זה הוא יחיד.

לצורך כך נחשב גבולות בקצוות תחום העלייה (לא ניתן להציב את הקצה אפס, כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת שם).

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} 2x^2\ln(x) - 5x^2 + 4ex - a = \lim_{x\to\infty} x^2\left(2\ln(x) - 5 + \frac{4e}{x} - \frac{a}{x^2}\right) = \infty\cdot\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x^2\ln(x) - 5x^2 + 4ex - a = -a$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+} 2x^2\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty}, \text{לופיטל} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -x^2 = 0$$

לכן אם $-a \geq 0$ נקבל שהפונקציה אינה חותכת את ציר האיקס כי החסם התחתון שלה הוא $-a$ וזה אינו מינימום כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת באפס.

אבל אם $-a < 0$ (כלומר $a > 0$) נקבל שקיימת נק' בה הפונקציה שלילית בזכות הגבול בקצה השמאלי, ונק' בה הפונקציה חיובית בזכות הגבול בקצה הימני, וכיוון שהפונקציה רציפה כצירוף של אלמנטריות לפי משפט ערך הביניים יש לה חיתוך עם ציר האיקס.

<u>לסיכום</u>: הוכחנו שלמשוואה יש פתרון יחיד אם ורק אם $a > 0$.

4. תהי f פונקציה המקיימת $\frac{f(x+1)}{f(x)}=3$ וגם $f(x)>0$ לכל $x\in[0,\infty)$.

ראשית לפני שנפתור את התרגיל, נשים לב לנוסחא שתעזור לנו בהמשך.

לכל $0\le a<1$ מתקיים כי $f(a+1)=3f(a)$, ולכן $f(a+2)=3f(a+1)=3^2f(a)$ וקל להוכיח באינדוקציה כי באופן כללי $f(a+n)=3^nf(a)$.

א. הוכיחו/הפריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

נגדיר פונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x & 0<x<1\end{cases}$

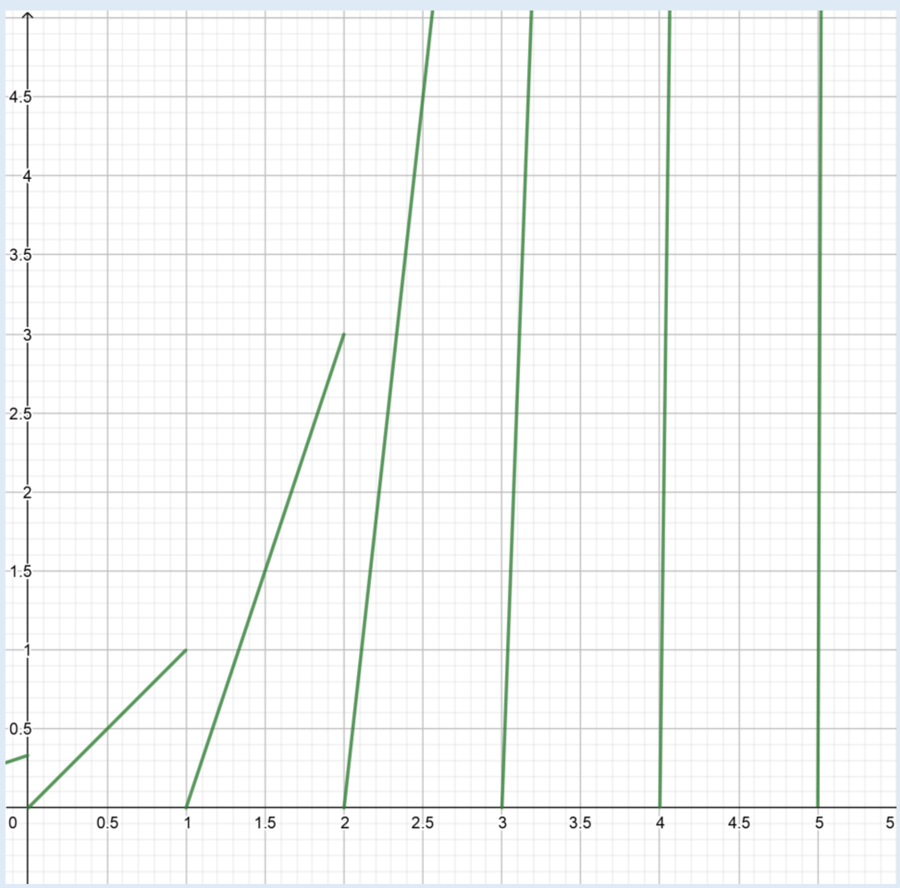
ולכל $x\ge 1$ נציג אותו מהצורה $x=a+n$ עבור $0\le a<1$ ונגדיר $f(x)=f(a+n)=3^nf(a)=3^na$

למי שמעוניין (ממש לא חובה) אפשר להציג את הפונקציה באמצעות הנוסחא הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}3^{[x]}(x-[x]) & x\notin\mathbb{N}\\ 3^x & x\in\mathbb{N}\end{cases}$$

כאשר $[x]$ הוא הערך השלם של x.

להלן ציור של הגרף הנוצר (באמצעות האתר המדהים https://www.geogebra.org/graphing):



כעת נפעיל את הפונקציה על הסדרה $\frac{1}{3^n}+n\to\infty$ ונקבל $f\left(\frac{1}{3^n}+n\right)=3^n\cdot\frac{1}{3^n}=1$ ולכן $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$.

ב. נתון בנוסף כי f רציפה בתחום $[0,\infty)$, הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

כיוון שf רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ לפי משפט ויירשטראס היא מקבלת שם נק' מינימום, נסמן את הגובה המינימלי בתחום זה בm.

כיוון שנתון שהפונקציה גדולה ממש מאפס בכל נק', נובע כי $m>0$.

לכן המינימום בקטע $[1,2]$ הוא $3m$ ושוב ניתן להוכיח באינדוקציה כי באופן כללי בקטע $[n,n+1]$ המינימום הוא $3^n\cdot m$.

כמובן שסדרת ערכי המינימום $3^n\cdot m$ שואפת לאינסוף.

יהי $M>0$, לכן קיים N כך ש $3^N\cdot m>M$ ולכן לכל $x>N$ מתקיים כי $f(x)>M$.

5.

א. הוכיחו שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $e^x+e^{-x}\geq 2$.

אפשר להוכיח את התרגיל בדרך המקובלת ע"י העברת אגף, בניית פונקציה וחקירתה, אך אציג פתרון אלגנטי אחר.

נכפול את שני צידי אי השיוויון בe^x וכיוון שמדובר בביטוי חיובי, נקבל אי שיוויון שקול:

$$(e^x)^2+1\geq 2e^x$$

$$(e^x)^2-2e^x+1\geq 0$$

$$(e^x-1)^2\geq 0$$

ואי השיוויון האחרון ברור מאליו.

ב. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n e^{a_n}+\frac{a_n}{e^{a_n}}$ וכן $a_1>0$. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

ראשית נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $a_n>0$.

עבור $n=1$ זה נתון. יהי n עבורו $a_n>0$ אזי $a_{n+1}=a_n e^{a_n}+\frac{a_n}{e^{a_n}}>0$ כפי שהיה צריך להוכיח.

לכן, הסדרה מונוטונית עולה אם ורק אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$. אכן:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{a_n}+\frac{1}{e^{a_n}}=e^{a_n}+e^{-a_n}\geq 2>1$$

לכן הסדרה עולה.

אם הסדרה חסומה, אזי היא מתכנסת לגבול סופי $a_n\to L$.

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה $a_{n+1}=a_n e^{a_n}+\frac{a_n}{e^{a_n}}$ ונקבל את המשוואה $L=Le^L+\frac{L}{e^L}$

כיוון שהסדרה עולה, כל איבריה גדולים או שווים לאיבר הראשון, ולכן גם הגבול $L\geq a_1>0$ ולכן $L\neq 0$.

נחלק בו ונקבל $1=e^L+e^{-L}$ אבל זו סתירה לפי סעיף א'.

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא עולה מתקיים כי $a_n\to\infty$.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k-2n)^2}$

נפתח את ביטוי הסדרה במטרה להציגו כסכום רימן.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k-2n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{(k-2n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}$$

כלומר a_n היא סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ בקטע $[0,1]$ עם החלוקות $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$ ובחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$.

כיוון שהפונקציה רציפה בקטע, וכיוון שפרמטר החלוקה $\frac{1}{n}$ שואף לאפס, נובע כי סדרת סכומי הרימן שואף לשטח הפונקציה בקטע כלומר

$$a_n\to\int_0^1\frac{1}{(x-2)^2}dx$$

כעת

$$\int_0^1\frac{1}{(x-2)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ולכן גבול הסדרה הינו $a_n\to\frac{1}{2}$.

ב. קרבו את $\sqrt[3]{e}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

ראשית נשים לב כי $\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}}$

נקרב באמצעות פולינום טיילור את הפונקציה $f(x) = e^x$ סביב הנקודה המצוייה $x_0 = 0$ בנקודה הרצוייה $x = \frac{1}{3}$ מסדר n.

השגיאה בקירוב זה היא

$$R_n\left(e^x, \frac{1}{3}, 0\right) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3} - 0\right)^{n+1}$$

כאשר $0 < c < \frac{1}{3}$.

כעת, יחד עם העובדה ש$e < 4$ ניתן לחסום $e^c < e^{\frac{1}{3}} < e^1 < 4$ ולכן השגיאה מקיימת:

$$|R_n| < \frac{4}{3^{n+1}(n+1)!}$$

עבור $n = 3$ נקבל כי $|R_n| < \frac{4}{3^4 \cdot 4!} = \frac{1}{486} < \frac{1}{100}$

פולינום הטיילור הוא

$$P_3(e^x, x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

ולכן הקירוב הינו

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{6 \cdot 3^3}$$