אקסטרמום

תזכורת

תהיינה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g_1,\dots,g_m$ ונרצה למצוא אקסטרמום ל-f תחת האילוץ $\forall i:\ g_i(x)=0$

נגדיר $L(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$

אזי נפתור מערכת

$$\begin{cases}\nabla L(x)=0\\ g_i(x)=0\end{cases}$$

נקבל פתרון (x_0,λ), $\operatorname{rank} g'(x_0)=m$

נגדיר $\Phi_{x_0}(h)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)h_ih_j$; $T_{x_0}=\{h: g'(x_0)h=0\}$

אם Φ_{x_0} חיובית על T_{x_0} $\Leftarrow$ ב-x_0 יש מינ'

Φ_{x_0} שלילית על T_{x_0} $\Leftarrow$ ב-x_0 יש מקס'

Φ_{x_0} מעורבת על T_{x_0} $\Leftarrow$ אין אקסטרמום.

דוגמה

נחפש אקסטרמום של $f(x,y,z)=xy+yz+xz$

תחת האילוץ $g(x,y,z)=xyz-v$

המערכת היא:

$$\begin{cases}y+z+\lambda yz=0\\ x+z+\lambda xz=0\\ x+y+\lambda xy=0\\ xyz=v\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x=y=z=v^{1/3}\\ \lambda=-2v^{-1/3}\end{matrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+z-2v^{-1/3}yz \qquad \frac{\partial L}{\partial y}=x+z-2v^{-1/3}xz$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=x+y-2v^{-1/3}xy \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=1-2v^{-1/3}z \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}=1-2v^{-1/3}y \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=1-2v^{-1/3}x$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x_0)=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}(x_0)=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(x_0)=-1\Rightarrow \Phi_{x_0}(h)=-2(h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3)$$

$$T_{x_0}:\ h_1+h_2+h_3=0$$

נציב למשל $h_1=-(h_2+h_3)$ ונקבל $\Phi_{x_0}:\ 2(h_2^2+h_2h_3+h_3^2)$ שהיא חיובית לגמרי

דוגמה

מצא $x,y,z>0$ $f(x,y,z)=xy+yz$ עם אילוצים $x^2+y^2=2$ $y+z=2$

$$L(x,y,z)=xy+yz+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(y+z-2)$$

נקבל מערכת:

$$\begin{cases} y+2\lambda_1 x=0 \\ x+z+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ y+\lambda_2=0 \\ x^2+y^2=2 \\ y+z=2 \end{cases}$$

לאחר מניפולציות נקבל

$$(1-y)(1+y+x)=0$$

$$x,y>0 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow x=z=1 \Longrightarrow \lambda_2=-1\ \ \lambda_1=-\frac{1}{2}$$

נקבל תבנית $\Phi_{x_0}=-h_1^2+2h_1h_2-h_2^2+2h_2h_3$

זו תבנית מעורבת על פני כל התחום לכן נחפש T_{x_0}, נבדוק ראשית את דרגת המט':

$$\begin{matrix} g_1=y+z-2 \\ g_2=x^2+y^2-2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}=0 & \frac{\partial g_1}{\partial y}=1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}=1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}=2 & \frac{\partial g_2}{\partial y}=2 & \frac{\partial g_2}{\partial z}=0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} h_2+h_3=0 \\ 2h_1+2h_2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h_2=-h_3 \\ h_1=-h_2 \end{cases}$$

$$\Phi_{x_0}: -h_1^2-3h_2^2-2h_3^2$$

זו תבנית שלילית, $\Longleftarrow$ ב-x_0 יש

דוגמה

עבור $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$; $g(x,y,z)=2x-y-3$

$$L(x,y,z)=x^2-y^2+z^2+\lambda(2x-y-3)$$

נקבל מערכת:

$$\begin{cases} 2x+2\lambda=0 \\ -2y-\lambda=0 \\ 2z=0 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

$L(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2(2x-y-3)$

$\Downarrow$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x-4 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2y-2 \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2z$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2$

ונגזרות מעורבות $=0$

$$\Phi_{x_0}(h) = 2h_1^2 - 2h_2^2 + 2h_3^2$$

והתבנית מוגבלת תחת התנאי. מ- T_{x_0}

$h_2 = 2h_1$

וקיבלנו $\Phi_{x_0}: -6h_1^2 + 2h_3^2$ זו תבנית מעורבת ולכן

אין אקסטרמום.

אינטגרלים

אינטגרל רימן ב-$\mathbb{R}$

יהי קטע $[a,b]$ נבנה חלוקה של $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

בכל קטע $[x_i,x_{i+1}]$ נבחר נקודה ξ_i ונסמן $\lambda=\max_i(x_{i+1}-x_i)$

אזי האינטגרל, אם קיים, יהיה

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=\int_a^b f(x)dx$$

תזכורת

תיבה I ב-$\mathbb{R}^n$ היא $I=\{x\in\mathbb{R}^n : a_i\le x_i\le b_i\}$

כמו כן $I_i=[a_i,b_i]\subset\mathbb{R}$ $\quad I=\prod_{i=1}^{n} I_i$

וקוטר של קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$: $d(E)=\sup_{x,y\in E}\|x-y\|$

לכן

$$d(I)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^2}$$

הגדרה

המידה של תיבה I מוגדרת ע"י

$$m(I)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$$

⊛ נחלק את הקטע $P_j := [a_j,b_j]$; $P=\prod_{j=1}^{n}P_j$

$$a_j=t_j^0<t_j^1<\dots<t_j^{m_j}=b_j$$

ואז נגדיר חלוקה של התיבה I:

$$I_\ell=I_{i_1,\dots,i_n}=[t_1^{i_1-1},t_1^{i_1}]\times\dots\times[t_n^{i_n-1},t_n^{i_n}]$$

$$1\le j\le n\ ;\quad 1\le i_j\le m_j\ ;\qquad 1\le \ell\le k=\prod m_j$$

נבחר נקודה $\xi_\ell\in I_\ell$ ונסמן $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$

הגדרה

סכום אינטגרלי של רימן לחלוקה P ולבחירת הנק' ξ:

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{\ell=1}^{k} f(\xi_\ell)\,m(I_\ell)$$

הגדרה

$\lambda(P)=\max d(I_\ell)$. אם קיים גבול סופי $\lim_{\lambda\to 0}\sigma(f,P,\xi)$ והוא בלתי תלוי בחלוקה P ובנק' ξ אזי נאמר ש-f אינטגרבילית לפי רימן על התיבה I, ונסמן את הגבול $\int_I f(x)dx$

אינטגרלים

משפט

אם f אינטגרבילית על I אזי היא חסומה בו

הוכחה

נקבע $\varepsilon>0$. מאינטגרביליות קיים $\delta>0$ כך שלכל (P,ξ) עבורם $\lambda(P)<\delta$ מתקיים $(J=\int_I f(x)\,dx)$ $|\sigma(f,P,\xi)-J|<\varepsilon$.

לכן אם נקח שתי חלוקות (P_1,ξ_1) (P_2,ξ_2) כך שעבורם $\lambda(P_i)<\delta \Rightarrow$ $|\sigma(f,P_1,\xi_1)-\sigma(f,P_2,\xi_2)|<2\varepsilon$

נניח בשלילה ש-f אינה חסומה. נקח P עם $\lambda(P)<\delta$

$\bigcup I_\ell=P$ איחוד של תתי תיבות. מההנחה קיימת I_{ℓ_0} בה f אינה חסומה. נקח $(P_1,\xi_1)=(P,\xi)$ חלוקה כזו, ונקח $(P_2,\xi_2)=(P,\xi')$, חלוקה כזו שונה רק בבחירת הנק' בתוך I_{ℓ_0} $\xi_{\ell_0}''\neq\xi_{\ell_0}'$, $\xi'\neq\xi$

נקבל $|\sigma(f,P_1,\xi_1)-\sigma(f,P_2,\xi_2)|=|f(\xi_{\ell_0}')-f(\xi_{\ell_0}'')|\cdot m(I_{\ell_0})$

עכשיו אפשר להגדיל מעבר ל-2ε (ע"י הגדלת המרחק בין הנקודות) בסתירה.

הגדרת דרבו.

תהי $\{I_\ell\}=P$ חלוקה של I, ונגדיר $M_\ell=\sup_{I_\ell} f$; $m_\ell=\inf_{I_\ell} f$

סכום תחתון של דרבו: $s(f,P)=\sum_\ell m_\ell\cdot m(I_\ell)$

סכום עליון של דרבו $S(f,P)=\sum_\ell M_\ell\cdot m(I_\ell)$

למה

עבור סכומים s ו-S מתקיים:

א. אם P' מתקבלת מחלוקה P

$s(f,P)\le s(f,P')\le S(f,P')\le S(f,P)$

ב. לכל שתי חלוקות P_1,P_2

$s(f,P_1)\le S(f,P_2)$

הסבר להערה

א אם של I_ℓ מפוצלת ל- I_ℓ^i:

$$m_{em}(I_\ell) < \sum_i \inf_{I_\ell^i} f \cdot m(I_\ell^i)$$

וכנ"ל גם עבור סכום עליון.

ב לוקחים $P = P_1 \cup P_2$ ומקבלים מסעיף א.

הגדרה

האינטגרל התחתון של f על I מוגדר על ידי

$$\underline{J} = \sup_P s(f,P)$$

האינטגרל העליון של f על I מוגדר על ידי

$$\overline{J} = \inf_P S(f,P)$$

משפט

תהי f חסומה על I. אזי f אינטגרבילית על I אם"ם

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) - s(f,P) = 0$$

הוכחה

($\Leftarrow$) נניח ש-f אינטגרבילית. נקח $\varepsilon>0$, ולכן קיים $\delta>0$ כך שלכל P עם $\lambda(P)<\delta$ ולכל בחירה מתקיים $|\sigma(f,P,\xi)-J|<\varepsilon$

$$J-\varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < J+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

נקח sup: $J-\varepsilon \le S(f,P) \le J+\varepsilon$

נקח inf: $J-\varepsilon \le s(f,P) \le J+\varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$0 \le S(f,P) - s(f,P) \le 2\varepsilon$$

ומכאן הגבול הנדרש מתקיים

($\Rightarrow$)

$$s(f,P) \le \underline{J} \le \overline{J} \le S(f,P)$$

$$0 \le \overline{J} - \underline{J} \le S(f,P) - s(f,P)$$

נשאיף $\lambda(P)\to 0$ ונקבל

$$J = \overline{J} = \underline{J}$$

$$\Downarrow$$

$$s(f,P) \le J \le S(f,P) \Rightarrow 0 \le J - s(f,P) \le S(f,P) - s(f,P)$$

$$0 \le S(f,P) - J \le S(f,P) - s(f,P)$$

קיבלנו $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = J$

וידוע ש- $s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le S(f,P)$

ולכן יש אינטגרביליות ממשפט הסנדוויץ'

הגדרה

נאמר שקב' $E\subset\mathbb{R}^n$ היא בעלת מידה אפס אם לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי בן מנייה של תיבות $\{I_j\}$ המכסה את E כך ש- $\sum_j m(I_j) < \varepsilon$

דוגמה

* כל קבוצה סופית עם n נקודות היא ממידה 0 (שכן מספיק לכל נק' לוקחים תיבה $m(I_j)<\frac{\varepsilon}{n}$)
* תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קב' בת מנייה, אזי ניתן לרשום $E=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נקח לכל $\{x_n\}$ ה"נק' I_{x_n} סגורה $x_n\in I_{x_n}$ ומתקיים $m(I_{x_n})<\frac{\varepsilon}{2^n} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(I_{x_n})<\varepsilon$ ולכן ממידה אפס.
* תהי $[a,b]\subset\mathbb{R}$, שם אין לה מידה 0.

אם $[a,b]\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה על ציר ה-x נכסה אותה בעזרת תיבה יחידה שלכל ε: סדרי ה-x שלה הם $[a,b]$ וסדרי ה-y שלה $[-\varepsilon,\varepsilon]$ ולכן שם היא במידה אפס.

למה

תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונק' רציפה כאשר I תיבה ב-$\mathbb{R}^{n-1}$. אזי הגרף של f על I כלומר הקב'

$$\{(x_1,\dots,x_{n-1},f(x_1,\dots,x_{n-1})) : (x_1,\dots,x_{n-1})\in I\}$$

היא בעלת מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$

הוכחה

נקבע $\varepsilon>0$. מרציפות במ"ש (סגורה) קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in I$ שמתקיים $\|x-y\|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{m(I)}$. תהי P חלוקה של I בעלת פרמטר δ, ונסמן $P=\{I_j\}$.

$$\{(x_1,\dots,x_{n-1},f(x_1,\dots,x_{n-1})):(x_1,\dots,x_{n-1})\in I\}\subseteq\bigcup_j I_j\times[\inf_{I_j} f,\sup_{I_j} f]$$

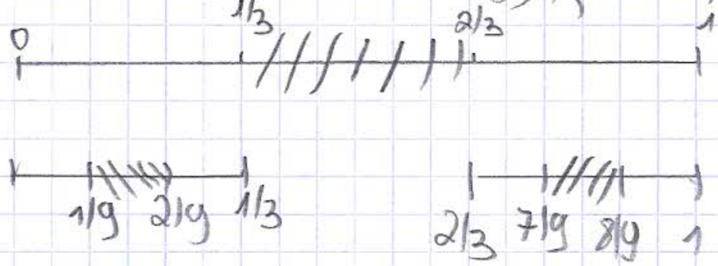
$$\sum_j m(I_j\times[\inf_{I_j}f,\sup_{I_j}f])<\sum_j m(I_j)\cdot\frac{\varepsilon}{m(I)}=m(I)\cdot\frac{\varepsilon}{m(I)}=\varepsilon$$

ולכן גרף f קב' ממידה אפס.

דוגמה- קב' קנטור

קבוצה שהיא ממידה אפס ואינה בת מניה.

נסתכל על $[0,1]$, נחלק לשלושה חלקים ונוריד ממנו את תת הקטע $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. עבור כל אחד מהקטעים שנותרו שוב נחלק לשלוש ונוריד קטע אמצעי, עד הלאה עד אינסוף.



יהיו $\{I_k\}$ הקטעים שהורדנו, אזי קב' קנטור היא

$$C=[0,1]\setminus\bigcup_k I_k$$

ברור שהקצוות של כל תתי הקטעים נמצאים ב-C, אבל לא רק.

אם נסמן $I_j^{(n)}$ קטעים שמורידים בשלב n, אזי

$$\sum_j m(I_j^{(n)})=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k m(I_k)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=1 \Rightarrow m(C)=0$$

נראה שקב' זו אינה בת מניה:

נציג כל $x\in[0,1]$ בבסיס 3 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ $a_n\in\{0,1,2\}$

בקטע $[\frac{2}{3},1]$ כל המס' "יראו" כך $0.2xxxx\dots$

$[0,\frac{1}{3}]$ $0.0xxxx\dots$

אחרי השלב השני "ישרדו" מס' מן הצורה

$0.22xxx\dots$ $0.20xxx\dots$ $0.02xxx\dots$ $0.00xxx\dots$

בסופו של דבר כל $x\in C$ ייראה כך:

$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ $a_n\in\{0,2\}$. לכן כל x ניתן להצגה ע"י סדרה

$b_n\in\{0,1\}$ כאשר: $b_n=0$ אם $a_n=0$

$b_n=1$ אם $a_n=2$

ומכאן גם ש- $|C|=\aleph$

הסבר $[0,1]$ מותאם לקב' הסדרות a_n, כי מותאם לקב'

הסדרות b_n וזה מותאם לכל המספרים הממשיים בבסיס

2 שהוצגתי $\aleph$).