

7 סוגי שדה - 3 מדרגות

הוכחה: לכל שדה  $F$  קיים פולינום אי-רציונלי

$$F = \mathbb{Z}_2[x]$$

$$p(x) \in F[x]$$

$$p(x) = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

פולינום אי-רציונלי  $p$  מדרג 2,  $\sqrt{2} \notin F$ ,  $\pm\sqrt{2}$  הם השורשים

$$p(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x] \quad \text{:המשפט}$$

$p$  הוא פולינום אי-רציונלי  $E/\mathbb{Q}$  מדרג 3

$$Gal(E/\mathbb{Q}) \quad \text{מדרג 6}$$

המשפט: קיימת תת-קבוצה של 3 מדרגות פולינומיות  $S_3$  של  $S_3$

$$G = Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$$

הקבוצה  $G$  היא

$$S_3 \quad (1)$$

(2)  $A_3$  (מדרג 3) היא תת-קבוצה של  $S_3$  מדרג 3

$$C_2 \quad (3) \quad \text{מדרג 2}$$

$$C_3 \quad (4) \quad \text{מדרג 3}$$

$$p(x) = (x - \alpha)h(x) \quad \text{כאשר } \alpha \in \mathbb{Q} \quad \text{וכן } h(x) \text{ אי-רציונלי}$$

הפולינום  $p$  אי-רציונלי  $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$E = \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \quad (1)$$

$$\mathbb{Q}(\alpha)$$

$$\mathbb{Q}$$

$$p = (x - \alpha) \cdot \frac{h(x)}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

(2)  $A_3$ ,  $C_3$ ,  $C_2$  (מדרג 3) היא תת-קבוצה של  $S_3$

השדה  $E$  הוא שדה פולינומי מדרג 3

$$E = \mathbb{Q}(\alpha)$$

$$\mathbb{Q}$$

$\alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}$  ו-1 נעדרת

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

הפונקציה  $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$  היא פולינום

$$f'(x) = 6x + 2$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -32$$

הפונקציה  $f$  אינה נוגעת ב-0

לכן אין לה שורשים

הפונקציה  $f$  היא פולינום

הפונקציה  $f$  היא פולינום

הפונקציה  $f$  היא פולינום

$$\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = S_2$$

הפונקציה  $f$  היא פולינום

$$p | [E:\mathbb{Q}]$$

↓

$$p | |G|$$

↓

לכן,  $p$  חלק מ- $|G|$

הפונקציה  $f$  היא פולינום

הפונקציה  $f$  היא פולינום

$$\left\{ \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 \pm 2\beta} \right\}$$

הפונקציה  $f$  היא פולינום

הפונקציה  $f$  היא פולינום

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

הפונקציה  $f$  היא פולינום

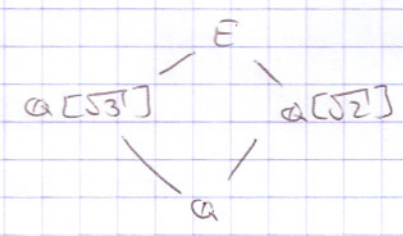
$$G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

הפונקציה  $f$  היא פולינום

הפונקציה  $f$  היא פולינום

הפונקציה  $f$  היא פולינום

$E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$  (10)



מלבד G נרשמו

$\text{Gal}(E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]) = \{id, \sigma: \begin{matrix} \sqrt{3} \rightarrow -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \rightarrow +\sqrt{2} \end{matrix}\}$

$\text{Gal}(E/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]) = \{id, \tau: \begin{matrix} \sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \rightarrow +\sqrt{3} \end{matrix}\}$

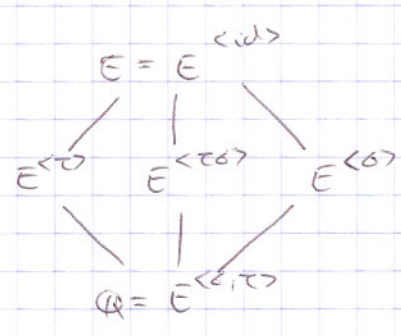
$G = \{id, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$

4 קבוצות איברות 1616 4 יחידות

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (2)



נרשמו b nlc



- $E^{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
- $E^{\langle \tau \rangle} = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$
- $E^{\langle \sigma\tau \rangle} = \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$

■