מבנים אלגבריים - תירגול 3

26 במרץ 2019

1 סדר של איבר וציקליות

הבחנה: יהיו $(G_2,*)\,,(G_1,\cdot)$ חבורות אזי גם $G_1\times G_2$ חבורה ביחס לפעולה $(g_1,g_2)\,(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=(g_1\cdot\tilde{g}_1,g_2*\tilde{g}_2)$. היחידה היא (e_{G_1},e_{G_2}) והופכי $(g_1,g_2)^{-1}=\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right)$.
למשל $S_2\times\mathbb{Z}$ היא חבורה עם הפעולה $(\sigma_1,n_1)\,(\sigma_2,n_2)=(\sigma_1\circ\sigma_2,n_1+n_2)$ והיחידה היא $(id,0)$.
הגדרה : תהא G חבורה.

1. הסדר של $g\in G$ הוא $o(g)=\min\{n\in\mathbb{N}:\ g^n=e\}$ אם הקבוצה ריקה נסמן $o(g)=\infty$

2. הסדר של G הוא מספר האיברים שיש בה.

3. $g\in G$ יקרא יוצר אם $\langle g\rangle=\{g^n\,:\,n\in\mathbb{Z}\}=G$. במקרה זה G תקרא ציקלית.

4. הערה: $o(g)=|\langle g\rangle|$. מסקנה: תהא G חבורה בת n איברים ו $g\in G$. אזי g יוצר של Gאמ"מ $o(g)=n$.

תרגיל: נסתכל על $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$. מצא את סדר האיברים, מצא יוצרים (והסק כי היא ציקלית)
פתרון:

$o(g)$	g
1	$(0,0)$
3	$(0,1)$
3	$(0,2)$
2	$(1,0)$
6	$(1,1)$
6	$(1,2)$

ולכן היוצרים הם $(1,1)\,,(1,2)$.
תרגיל: הוכח כי $G=\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית עבור $n>1$.
פתרון: ב G יש n^2 איברים. נניח בשלילה כי החבורה ציקלית. אזי קיים $g=(m_1,m_2)\in G$ כך ש $G=\langle g\rangle$.
הסדר של g הוא לכל היותר n כי $g^n=(n\cdot m_1,n\cdot m_2)=(0,0)=e$ ולכן $|\langle g\rangle|\le n<n^2=|G|$ סתירה.
תרגיל: הוכח כי S_n אינה ציקלית עבור $n>2$
הוכחה: ראינו כי S_n אינה אבלית ולכן אינה ציקלית. בהסתמך על המשפט: G צקילית גורר G אבלית.

2 תת חבורה

תהא G חבורה. $H \subseteq G$ תקרא תת חבורה (ת"ח) אם היא חבורה ביחס לפעולה של G.
סימון $H \leq G$
קריטריון לת"ח:
H היא ת"ח אם

1. $\forall h_1, h_2 \in H:\ h_1 h_2^{-1} \in H$
2. $H \neq \emptyset$ (או $e \in H$)

תנאי שקול

1. $\forall h_1, h_2 \in H:\ h_1 h_2 \in H$
2. $\forall h \in H:\ h^{-1} \in H$
3. $H \neq \emptyset$ (או $e \in H$)

הערה: בחבורה סופית מספיק לבדוק

1. $\forall h_1, h_2 \in H:\ h_1 h_2 \in H$
2. $H \neq \emptyset$ (או $e \in H$)

דוגמאות:

1. לכל חבורה G מתקיים כי: $G, \{e\}$ הן ת"ח. הן נקראות ת"ח הטריוואליות.
2. לכל V מ"ו ת"ח שלו הן ת"מ $W \leq V$.
3. לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$ תת חבורה, ואלו תתי החבורה היחידות שלו.
הוכחה:
   (א) ברור כי $n\mathbb{Z}$ תת חבורה. כי $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$. ואם $na, nb \in n\mathbb{Z}$ אז גם $na - nb = n(a-b) \in n\mathbb{Z}$.
   (ב) נוכיח את הכיוון השני: תהא $H \neq \{0\}$ ת"ח. נגדיר $n = \min H \cap \mathbb{N}$ (קיים כי אחרת התנאי הראשון לא מתקיים). טענה: $H = n\mathbb{Z}$. הוכחה: $(\supseteq)$ ברור מהקריטריונים. $(\subseteq)$ יהא $h \in H$. ב.ה.כ h אי שלילי (אחרת נחליף אותו ב $-h$) נחלק $h = qn + r$ עבור $0 \leq r < n$. אם $r > 0$ נקבל כי סתירה למינ' של n כי $r = h - qn \in H$. לכן $r = 0$ ואז $h = qn \in n\mathbb{Z}$.
4. לכל $m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \leq \mathbb{Z}_n$ תת חבורה, ואלו תתי החבורה היחידות שלו.
5. $\left\{e^{i\pi x} : x \in \mathbb{R}\right\} \leq \mathbb{R}$ לא ברור לי, הרי עבור $x = \frac{1}{2}$ מקבלים $e^{i\frac{\pi}{2}} = i \notin \mathbb{R}$.
6. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$
7. $A_n \leq S_n$ תת חבורת התמורות הזוגיות.

8. תהא G חבורה ו $g \in G$ תת החבורה הנוצרת ע"י g היא $\langle g\rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ והיא תת חבורה. למשל $n\mathbb{Z} = \langle n\rangle = \langle -n\rangle$

9. $C(G) \leq G$

10. $\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} | \, |A| = 1\} = SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} | \, |A| \neq 0\}$

11. $\mathbb{Q}^{\times} \subseteq \mathbb{Q}$ אינה תת חבורה כי זה לא אותה פעולה.

12. קבוצת המחזורים מאורך 2 עם פונקצית הזהות, תת קבוצה של S_n. אינה תת חבורה כי $(1,2)\,(2,3)$ אינו מחזור מאורך 2.

יהיו G_1, G_2 חבורות. אזי אם $H_i \leq G_i$ אז $H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2$ היא תת חבורה.
שימו לב שאילו לא ת"ח היחידות. למשל $H = \{(1,1)\,,(0,0)\} \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ לא מהצורה $H = H_1 \times H_2$.
הגדרה: תהא G חבורה ו $A \subseteq G$ תת קבוצה. אזי $\langle A\rangle$ היא הת"ח הכי קטנה שמכילה את A והיא מוגדרת

$$\langle A\rangle = \left\{\prod_{i=1}^{n} a_i \,|\, a_i \in A \vee a_i^{-1} \in A, n \in \mathbb{N}\right\}$$

דוגמאות:

1. $\sigma_1 = (1,2)\,, \sigma_2 = (1,2,\dots n) \in S_n$ מקיימות $\langle \sigma_1, \sigma_2\rangle = S_n$ (ש.ב.)
2. $\langle \sigma_1\rangle = \{id, \sigma_1\} \leq S_n$
3. $\langle \sigma_2\rangle = \left\{\sigma_2^i \,|\, i = 1, 2 \dots, n\right\} \leq S_n$
4. $\langle G\rangle = G$
5. $\langle (1,2)\,,(3,4)\rangle = \{(1,2)\,,(3,4)\,, id, (1,2)\,(3,4)\}$

שימו לב שהסימון $\langle g\rangle = G$ עבור חבורה ציקלית מתלכד עם ההגדרה לעיל.