מבנים אלגבריים להנדסה, 83-218, פתרון בוחן 1 תשפ"א

כ"ג באייר ה'תשפ"א, 5.5.21

מרצה: פרופ' רון עדין.
מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן חמישה סעיפים, כל סעיף שווה 20 נקודות. יש לענות על כל הסעיפים.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: 80 דקות.
- חומר עזר: מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

.1

(א) (20 נק') האם הקבוצה $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות היא אגודה/מונואיד/חבורה? אם מדובר באגודה ־ מצאו את כל היחידות (שמאליות וימניות), אם מדובר במונואיד מצאו את כל האיברים ההפיכים.

(ב) (20 נק') האם הקבוצה

$$H = \{Id, f = (1,2,3)(4), g = (3,2,1)(4), h = (2,3,4)(1), k = (4,3,2)(1)\}$$

היא תת־חבורה של חבורת התמורות S_4? נמקו.

פתרון :

א. זה אגודה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a' & b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ba' & bb' \end{pmatrix} \in G$.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי ובפרט מטריצות מ G.

היחידות השמאליות הן $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ כי לכל a, b, c מתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$.

אין יחידות ימניות. הוכחה: נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ יחידה ימנית. ראיתם בהרצאה שאם יש יחידה שמאלית ויחידה ימנית הן שוות ומקבלים את איבר היחידה היחיד, בסתירה לכך שיש אינסוף יחידות שמאליות.

ב. לא, נשים לב שמתקיים:

$$f \circ h = (1,2,3)(2,3,4) = (1,2)(3,4) \notin H$$

נימוק נוסף: $|H| = 5 \nmid 24 = |S_4|$.

.2

(א) (20 נק') תהא G חבורה אבלית עם שישה איברים. נתון:

$$\exists g \in G : o(g) = 2 \wedge \exists h \in G : o(h) = 3$$

כלומר, ישנו איבר מסדר 2, וישנו איבר מסדר 3. הוכיחו או הפריכו: G ציקלית.

(ב) (20 נק') תהא G חבורה מסדר 22 (כלומר, $|G| = 22$). תהא $H \leq G$ תת־חבורה המקיימת $H \neq G$. הוכיחו או הפריכו: H ציקלית.

פתרון :

א. הוכחה: נראה ש־ $o(gh) = 6$: ראשית, מסקנה ממשפט לגראנז אומרת: $o(gh)|6$, ולכן $o(gh) \in \{1,2,3,6\}$. אם $o(gh) = 1$ אז $gh = e$, מה שאומר $g = h^{-1}$, אבל ראינו ש־ $o(h^{-1}) = o(h) \neq o(g)$. נמשיך הלאה:

$$(gh)^2 = g^2h^2 = h^2 \neq e$$

$$(gh)^3 = g^3h^3 = g^3 = g \neq e$$

ולכן $o(gh) = 6$, וכיון שיש איבר שסדרו כגודל החבורה נקבל ש־G ציקלית.

ב. תהי $H \leq G$. ממשפט לגראנז' נקבל $|H| \mid |G|$, ולכן $|H| \in \{1, 2, 11, 22\}$. נתון $H \neq G$, ולכן 22 נפסל.

אם $|H| = 1$ אז $H = \{e\}$, וזו כמובן חבורה ציקלית.

אם $|H| \in \{2, 11\}$ אז נקבל תת חבורה מסדר ראשוני, ולפי משפט מההרצאה חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית.

3. (20 נק') תהא G חבורה, ותהיינה $H, K \leq G$ תת־חבורות. הוכיחו: $H \cup K \leq G$ אם ורק אם $H \subseteq K \vee K \subseteq H$ (כלומר, איחוד של תת־חבורות הוא תת־חבורה אם ורק אם אחת מהן מוכלת בשנייה).

פתרון :

$\Rightarrow$: זה ברור כי אם $K \subseteq H$ אז $H \cup K = K \leq G$, וכן אם $H \subseteq K$ אז $H \cup K = H \leq G$.

$\Leftarrow$: נניח $H \cup K \leq G$ ונניח בשלילה $H \nsubseteq K \wedge K \nsubseteq H$. זאת אומרת שיש $h \in H \setminus K, k \in K \setminus H$.

כעת, מהנתון ש־ $H \cup K$ תת־חבורה ומסגירות נקבל $hk \in H \cup K$. ולכן $kh \in H \vee kh \in K$.

אם $kh \in H$ אז כיון שגם $h \in H$ ומקיום הופכי נקבל $h^{-1} \in H$, ומסגירות לפעולה נקבל: $k = khh^{-1} = (kh)h^{-1} \in H$ בסתירה לבחירת k.

בדומה, אם $kh \in K$ אז כיון ש־ $k \in K$ נקבל שגם $k^{-1} \in K$, ומסגירות לפעולה גם $h = k^{-1}kh = k^{-1}(kh) \in K$ בסתירה לבחירת h.