מבנים דיסקרטיים – תרגיל 2

שאלה 1

א. יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר את $O_n(\mathbb{R})$ להיות קבוצת המטריצות האורתוגנליות בגודל $n \times n$, כלומר $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = I\}$ (באשר A^T היא השחלוף של A). הוכיחו כי $O_n(\mathbb{R})$ חבורה ביחס לכפל מטריצות. הראו כי $O_3(\mathbb{R})$ לא אבלית.

ב. נגדיר $T = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. הוכיחו כי $(T,\ \cdot\ )$ היא חבורה קומוטטיבית (הכפל ב-T הוא כפל של מספרים מרוכבים).

ג. מצאו איבר מסדר 4 ב-T.

שאלה 2

יהי $(M,\cdot)$ מונויד.

א. הראו כי אם M חילופי אז לכל $a, b \in M$ ו-$n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(ab)^n = a^n b^n$. [המלצה: אינדוקציה על n.]

ב. מצאו דוגמא למונויד לא קומוטטיבי עבורו סעיף א לא נכון. [רמז: S_3.]

יהי $k \in \mathbb{N}$. נגדיר $N = \{g^k \middle| g \in M\}$.

ג. הראו כי אם M אבלי, אז $(N,\cdot)$ גם מונויד אבלי. [העזרו בסעיף א.]

ד. מצאו דוגמא למונויד לא קומוטטיבי עבורו סעיף ג לא נכון. איזו מהתכונות של מונויד לא מתקיימת עבור $(N,\cdot)$.

ה. הוכיחו או הפריכו: אם M חבורה חילופית אז $(N,\cdot)$ חבורה אבלית.

שאלה 3

נתונות התמורות הבאות ב-S_7: $\sigma = (5,6)(1,3,4)$, $\tau = (1,2,4)(6,7,3)$.

א. חשבו את $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\tau^{-2}\sigma^{-1}$. כתבו את התשובות ב-2 דרכים: בייצוג ע"י טבלה ובייצוג ע"י מכפלה של מחזורים זרים.

ב. חשבו את הסדר של σ ו-τ.