פתרון תרגיל בית 4

1. תהי $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$. מצאו פונקציה הרמונית צמודה ל־u.

פתרון: קודם נבדוק ש־u היא פונקציה הרמונית

$$u_x=e^x(x\cos y-y\sin y)+e^x\cos y=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y),$$
$$u_{xx}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)+e^x\cos y=e^x(x\cos y-y\sin y+2\cos y),$$
$$u_y=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y),$$
$$u_{yy}=e^x(-x\cos y-\cos y-\cos y+y\sin y)=-e^x(x\cos y-y\sin y+2\cos y)$$
$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0.$$

כעת נמצא פונקציה הרמונית צמודה ל־u באמצעות תנאי קושי רימן:

$$v_y=u_x=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y),$$
$$\Rightarrow v=\int e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)dy+c(x)$$
$$=e^x\left(x\int\cos ydy-\int y\sin ydy+\cos ydy\right)+c(x)$$
$$=e^x\left(x\sin y-(-y\cos y+\sin y)+\sin y\right)+c(x)$$
$$=e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)+c(x)$$

נגזור את v שקיבלנו לפי x:

$$v_x=e^x(x\sin y+y\cos y)+e^x\sin y+c'(x)=e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)+c'(x)$$

כיוון ש־ $u_y=-e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)$ נקבל שוב מתנאי קושי רימן ש־$c'(x)=0$.
לכן

$$v=e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)$$

היא פונקציה הרמונית צמודה ל־u.

2. נניח ש־ $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא פונקציה הרמונית וגם u^2 הרמונית. הוכיחו ש־u פונקציה קבועה. הדרכה: לגזור לפי כלל שרשרת.

פתרון: נגזור את הפונקציה $f=u^2$ פעמיים לפי x ולפי y:

$$f_x=2uu_x,f_{xx}=2u_xu_x+2uu_{xx}=2u_x^2+2uu_{xx}$$
$$f_y=2uu_y,f_{yy}=2u_yu_y+2uu_{yy}=2u_y^2+2uu_{yy}$$

לכן מהתנאי ש־u היא פונקציה הרמונית נובע ש־$u_{xx}+u_{yy}=0$, כיוון שגם $f=u^2$ הרמונית,

$$0=f_{xx}+f_{yy}=2u_x^2+2uu_{xx}+2u_y^2+2uu_{yy}=2(u_x^2+u_y^2)+2u(u_{xx}+u_{yy})$$
$$=2(u_x^2+u_y^2)$$

כיוון שכל אחד מהביטויים u_x^2 ו־ u_y^2 הוא אי שלילי נקבל ש־$u_x=u_y=0$, לכן u קבועה.

3. נניח ש־$f=u+iv$ היא פונקציה שלמה. להוכיח או להפריך: הפונקציה uv הרמונית.

פתרון: אם f היא פונקציה שלמה אז גם $f^2=u^2-v^2+2iuv$ היא פונקציה שלמה (מכפלה של פונקציות שלמות היא פונקציה שלמה). כיוון שהחלקים הממשיים והמדומים של פונקציה שלמה הם פונקציות הרמוניות נובע ש־u^2-v^2 ו־ $2uv$ הן פונקציות הרמוניות, לכן בפרט נקבל ש־ uv הרמונית.

4. הוכיחו שמתקיים אי־השוויון

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz\right|\leq 2$$

כאשר γ היא המסילה המתחילה מהנקודה $z_0=-1+i$ ומסתיימת בנקודה $z_1=1+i$.

פתרון: נרשום את העקומה בצורה מפורשת, $\gamma=\{z:z=x+i,-1\leq x\leq 1\}$. לכן $\sqrt{2}\geq|z|\geq 1$ ולכן $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{|z|^2}\leq 1$. מכאן נקבל ש־

$$M=\max\left\{\frac{1}{|z|^2}:z\in\Gamma\right\}=1, L=length(\Gamma)=2,$$

$$\Rightarrow\left|\int_\gamma\frac{1}{z^2}dz\right|\leq M\cdot L=2.$$

5. חשבו $\int_\gamma \sin z+\overline{z}dz$ כאשר γ היא המסילה המוגדרת ע"י

$$\gamma(t)=\begin{cases}e^{it}:-\pi\leq t\leq 0\\ 1-2t:0\leq t\leq 1\end{cases}$$

פתרון: מהלינאריות של האינטגרל נקבל

$$\int_\gamma \sin z+\overline{z}dz=\int_\gamma \sin zdz+\int_\gamma\overline{z}dz$$

האינטגרל $\int_\gamma \sin zdz$ שווה לאפס כי ל־$\sin z$ יש פונקציה קדומה $-\cos z$ והעקומה γ היא סגורה (לכן ממשפט הפונקציה הקדומה האינטגרל שווה לאפס כי נקודות ההתחלה והסיום של γ שוות). נשאר לחשב את האינטגרל $\int_\gamma\overline{z}dz$. נחשב אינטגרל זה לפי ההגדרה, נשתמש גם בפירוק $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ כאשר $\gamma_1(t)=e^{it},-\pi\leq t\leq 0$ היא חצי מעגל תחתון ו־$\gamma_2(t)=1-2t,0\leq t\leq 1$ היא הקטע הממשי בין $z=-1$ ל־ $z=1$:

$$\int_\gamma\overline{z}dz=\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\overline{z}dz=\int_{\gamma_1}\overline{z}dz+\int_{\gamma_2}\overline{z}dz$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \overline{e^{it}} \left(e^{it}\right)' dt + \int_0^1 \left(\overline{1-2t}\right)(1-2t)' dt = i \int_{-\pi}^{0} e^{-it} e^{it} dt - 2 \int_0^1 (1-2t) dt$$

$$= i \int_{-\pi}^{0} dt - 2 \int_0^1 (1-2t) dt = i\pi - 2\left(t - t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = i\pi.$$

6. לכל $R > 0$ נגדיר את המסילה $\Gamma_R = \{z : |z| = R\}$, הוכיחו ש־

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(z^2+2z-5)dz}{(z^2+4)(z^2+2z+2)} = 0$$

<u>פתרון</u>: לפי משפט ההערכה

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \le 2\pi R \cdot \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|$$

כאשר אורך המסלול Γ_R הוא היקף המעגל ברדיוס R, כלומר $2\pi R$. לכן נחפש הערכה לערך המוחלט של f לאורך המעגל Γ_R.

$$|f(z)| = \left| \frac{(z^2+2z-5)dz}{(z^2+4)(z^2+2z+2)} \right| = \frac{|z|^2 \left|1 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2}\right|}{|z|^4 \left|1 + \frac{4}{z^2}\right| \left|1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2}\right|}$$

כעת נניח ש־$z \in \Gamma_R$, כלומר $|z| = R$. שימוש באי־שוויון המשולש יתן

$$\left|1 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2}\right| \le 1 + \left|\frac{2}{z}\right| + \left|\frac{5}{z^2}\right| = 1 + \frac{2}{R} + \frac{5}{R^2}.$$

לכן עבור R מספיק גדול נקבל

$$\left|1 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2}\right| \le 2$$

כמו כן

$$\left|1 + \frac{4}{z^2}\right| \ge \left|1 - \left|\frac{4}{z^2}\right|\right| = \left|1 - \frac{4}{R^2}\right|$$

ולכן עבור R מספיק גדול נקבל

$$\left|1 + \frac{4}{z^2}\right| \ge \frac{1}{2}$$

ולבסוף

$$\left|1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2}\right| \ge \left|1 - \left|\frac{2}{z} + \frac{2}{z^2}\right|\right| \ge \left|1 - \left|\frac{2}{z}\right| - \left|\frac{2}{z^2}\right|\right| = \left|1 - \frac{2}{R} - \frac{2}{R^2}\right|$$

ולכן עבור R מספיק גדול

$$\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \geq \frac{1}{2}$$

לכן עבור R מספיק גדול

$$|f(z)| = \frac{|z|^2 \left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|}{|z|^4 \left|1+\frac{4}{z^2}\right| \left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|} \leq \frac{2}{R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{8}{R^2}.$$

לכן עבור R מספיק גדול

$$\max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \leq \frac{8}{R^2}$$

מכאן נקבל ש־

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leq \lim_{R\to\infty} 2\pi R\frac{8}{R^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{16\pi}{R} = 0$$

לכן נסיק מכלל הסנדוויץ:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$