תרגיל 5

1. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מצא את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

2. יהא V מ"ו מימד סופי ותהא $T:V\to V$ ה"ל. נניח כי v_1 ו"ע של Tשל ע"ע λ_1.נניח כי v_2 ו"ע של Tשל ע"ע λ_2

(א) הוכח כי אם v_1+v_2 הוא ו"ע אזי $\lambda_1=\lambda_2$.

(ב) נניח כי לכל בסיס B מתקיים כי $[T]_B$ אלכסונית. הוכח כי קיים סקלאר α המקיים

$$\forall v\in V:\,Tv=\alpha v$$

3. יהיו $S,T:V\to V$ ה"ל הוכח כי ל ST,TS יש אותם ע"ע. (חלק למקרים: אם $\lambda=0$ ע"ע ואם $\lambda\neq0$ ע"ע)

4. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ המוגדרת

$$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\dots&a_{n-1}&a_n\\a_n&a_1&\dots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_n&\dots&a_{n-3}&a_{n-2}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&\dots&a_n&a_1\end{pmatrix}$$

כלומר, כל שורה היא "סיבוב ציקלי" ימינה של השורה שמעליה. יהא $\rho\in\mathbb{C}$ המקיים $\rho^n=1$ (כלומר שורש יחידה מסדר n). הוכח כי

$$v=\left(1,\rho,\rho^2,\dots,\rho^{n-1}\right)$$

הוא וקטור עצמי של A. מצא את הע"ע המתאים.

בהצלחה!