דוגמה לאינדוקציה

22 באוקטובר 2015

שאלה 1 (להבנה)

הראו ש:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

הוכחה

באינדוקציה.

- בסיס האינדוקציה: $n=1$.

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1.$$

- נניח את נכונות הטענה עבור n טבעי כלשהו ונוכיח אותה עבור $n+1$. נשים לב כי:

רוצים להוכיח בצעד זה ע"י הצבה ישירה שמתקיים השיוויון הבא $\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)$$

ואולם לפי ההנחה:

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

אבל עם זה כבר יותר קל לעבוד:

$$= (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right] = (n+1)\left[\frac{n+2}{2}\right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

כנדרש.

שאלה 2 (להעמקה)

הראו באינדוקציה כי לכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים

$$n! < (\frac{n+1}{2})^n$$

פתרון.

עוד פעם באינדוקציה על n:

- עבור $n = 2$ זה נובע מיידית:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2 < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = 1.5^2 = 2.25$$

- נניח נכונות עבור n ונראה עבור $n+1$. מתקיים:

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

הפעם רוצים להוכיח ש

$$(n+1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$$

אבל כאן ניתן להעזר בהנחת האינדוקציה:

$$< (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}$$

נשאר לבדוק כי מתקיים האי"ש הבא

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

אולם

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \iff 2 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff 2 < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

והמעבר האחרון ינבע מהצבה ישירה של $x = \frac{1}{n+1}$ באי"ש ברנולי (בדקו). שוב הוכחנו את הדרוש.