

מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 9 תשע"ח.

1. מצאו את $|\text{conj}(\sigma)|$ כאשר $\sigma = (2573) \in S_{14}$
פתרון:

אנו נדרשים למצוא את מספר התמורות שצמודות ל- σ . ידוע לנו שהתמורות היחידות שצמודות למחזור מאורך 4 הן מחזורים מאורך 4. מספר המחזורים האלו הוא

$$|\text{conj}(\sigma)| = \binom{14}{4} (4-1)! = 6006$$

2. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה G על \mathbb{R}^2 היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0, 1)$ ושל $(1, 1)$.

(א) $G = \mathbb{R}$ עם הפעולה $t * (x, y) = (x + t, y + 2t)$

(ב) $G = \mathbb{Z}$ עם הפעולה $t * (x, y) = (tx, t^2x)$

(ג) $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$ עם פעולה $A * (x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

i. מתקיים:

$$\begin{aligned} (t+s) * (x, y) &= (x+t+s, y+2(t+s)) = (x+t+s, y+2t+2s) \\ &= s * (x+t, y+2t) = t * (s * (x, y)) \end{aligned}$$

$$0 * (x, y) = (x+0, y+0) = (x, y)$$

ולכן זו פעולה של חבורה על קבוצה. נתאר את המסלולים:

$$\text{orb}(0, 1) = \{t * (0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 1+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

של הישר $y = 1 + 2x$.

$$\text{orb}(1, 1) = \{t * (1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 1+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

הגרף של הישר $y = 2x - 1$.

א'. זו לא פעולה של חבורה על קבוצה. כי למשל $0 * (x, y) = (0, 0) \neq (x, y)$.

ב'. זו פעולה של חבורה על קבוצה (כידוע מלינאריות). נתאר את המסלולים:

$$\begin{aligned} orb(0, 1) &= \left\{ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ orb(1, 1) &= \left\{ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

3. תהי G חבורה שפועלת על קבוצה X . נגדיר יחס על X באופן הבא: $x \sim y$ אם קיים $g \in G$ כך ש $gx = y$.

(א) הוכיחו שזהו אכן יחס שקילות. (הערה: מחלקות השקילות הן המסלולים. כלומר, מחלקת השקילות של x היא $orb(x)$ רפלקסיבי: $x \sim x$ ולכן $x = ex$.)

סימטרי: נניח $x \sim y$ כלומר, קיים $g \in G$ כך ש $gx = y$. אזי $g^{-1}y = x$ ולכן $y \sim x$.

טרנזיטיבי: נניח $x \sim y$ ו $y \sim z$. כלומר, קיימים $g, h \in G$ כך ש $gx = y$, $hy = z$. מתקיים: $(hg)x = h(gx) = hy = z$. לכן $x \sim z$.

(ב) הוכיחו שאם $x \sim y$ אז $stab(x)$ צמוד ל $stab(y)$, כלומר, קיים g כך ש $stab(x) = g(stab(y))g^{-1}$. פתרון:

i. אם x, y הם באותו מסלול אזי יש $g \in G$ כך ש $x = g * y$ אזי

$$\begin{aligned} Stab(x) &= \{a \in G \mid a * x = x\} = \{a \in G \mid a * (g * y) = g * y\} \\ &= \left\{ a \in G \mid \underbrace{g^{-1}ag}_b * y = y \right\} = \{bg^{-1} \mid b * y = y\} \\ &= g^{-1} \{b \in G \mid b * y = y\} g = g^{-1} Stab(y) g \end{aligned}$$

4. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X ונגדיר

$$G_0 = \{g \in G \mid g * x = x \forall x \in X\}$$

(א) הוכיחו ש G_0 היא תת חבורה של G
 הוכחה:

לפי הגדרה, $G_0 = \bigcap_{x \in X} \text{stab}(x)$,

הוכחנו בכיתה שלכל x , $\text{stab}(x)$ היא תת חבורה של G , וידוע שחיתוך של תת חבורות הוא תת חבורה.

(ב) הוכיחו ש G_0 תת חבורה נורמלית.
 הוכחה:

יהי $g \in G_0$ ו $h \in G$. רוצים להוכיח ש $hgh^{-1} \in G_0$. כלומר, שלכל $x \in X$ $(hgh^{-1})x = x$. ובכן, $(hgh^{-1})x = (hg)(h^{-1}x) = h(g(h^{-1}x)) = hx = x$.
 $h(h^{-1}x) = (hh^{-1})x = ex = x$. המעבר השלישי נובע מכיוון ש $g \in G_0$.

(ג) נגדיר פעולה של G/G_0 על X ע"י: $(gG_0)x = gx$. הוכיחו שהפעולה מוגדרת היטב, כלומר לא תלויה בבחירת הנציג. (אין צורך להוכיח שזאת אכן פעולה)
 הוכחה:

יהיו $g_1, g_2 \in G$ כך ש $g_1G_0 = g_2G_0$. זה אומר ש $g_2^{-1}g_1 \in G_0$. כלומר, קיים $h \in G_0$ כך ש $g_1 = g_2h$. רוצים להראות שלכל $x \in X$ $g_1x = g_2x$, כלומר, $g_2x = (g_2h)x = g_2(hx) = g_2x$, ובכן, מכיוון ש $hx = x$.

(ד) הוכיחו שהפעולה מהסעיף הקודם נאמנה.
 הוכחה:

נניח שקיים $g \in G$ כך שלכל $x \in X$ $gG_0x = gx$, אבל, $gG_0x = x$. כלומר, $gx = x$ לכל $x \in X$. לכן, $g \in G_0$ וקיבלנו ש $gG_0 = G_0$, האיבר הטריבויאלי בחבורה G/G_0 .

5. חשבו את $\text{stab}(x)$ במקרים הבאים:

(א) פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל, x איבר כלשהו בחבורה.
 פתרון:

המייצב של x זה כל $y \in G$ כך ש: $yx = x$. נכפיל ב x^{-1} מימין, ונקבל $y = e$. כלומר, לכל $x \in G$, $\text{stab}(x) = \{e\}$.

(ב) S_4 פועלת על פולינומים עם 4 משתנים, x שווה לפולינום $x_1 + x_2$.
 פתרון:

המייצב של $x_1 + x_2$ זה כל הפולינומים שלא נוגעים ב 1 וב 2, או שמחליפים את 1 ב 2. כלומר, $\text{stab}(x_1 + x_2) = \{id, (3, 4), (1, 2), (1, 2)(3, 4)\}$.

6. מצאו את מחלקות הצמידות בחבורה:

S_3 (א)

פתרון:

S_3 יש 3 מבני מחזוריים אפשריים ולכן נקבל 3 מחלקות צמידות:

$$\{\text{id}\}, \{(12), (13), (23)\}, \{(123), (132)\}$$

D_4 (ב)

כאן נשתמש בתובנה הבאה: אם $A \subseteq D_4$ קבוצה שכל האיברים בה צמודים ובנוסף היא מקיימת שלכל $a \in A$

$$\sigma a \sigma^{-1} \in A$$

ו

$$\tau a \tau^{-1} \in A$$

אז A מחלקת צמידות.

הסבר: צריך להראות לכל $g \in G$ ולכל $a \in A$ חייב להתקיים

$$g a g^{-1} \in A$$

עכשיו $g = \tau^l \sigma^k$ עבור l ו k כלשהם. לפי הנתון

$$\sigma a \sigma^{-1} \in A$$

הפעלה שוב ושוב תתן לנו ש

$$\sigma^k a \sigma^{-k} \in A$$

ואז

$$\tau \sigma^k a \sigma^{-k} \tau^{-1} \in A$$

הפעלה שוב ושוב תתן לנו

$$\tau^l \sigma^k a \sigma^{-k} \tau^{-l} \in A$$

כלומר

$$g a g^{-1} \in A$$

עשינו למעשה תרגיל דומה בכיתה לגבי תת חבורות נורמליות.
 עכשיו אפשר לגשת לפתור את השאלה.
 שוב id הוא מחלקת צמידות בפני עצמו. כמו כן σ^2 הוא מחלקת צמידות
 בפני עצמו כי

$$\sigma\sigma^2\sigma^{-1} = \sigma^2$$

ו

$$\tau\sigma^2\tau^{-1} = \sigma^2\tau\tau = \sigma^2$$

עכשיו, σ ו σ^3 הם מחלקת צמידות בפני עצמה כי

$$\sigma\sigma^k\sigma^{-1} = \sigma^k$$

ואילו

$$\tau\sigma\tau = \sigma^3$$

$$\tau\sigma^3\tau = \sigma$$

עכשיו נשאר להבין את האיברים מהצורה $\tau\sigma^k$. עם $\tau\sigma^2$ באותה מחלקת
 צמידות כי

$$\tau\tau\tau^{-1} = \tau$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma^{-2} = \tau\sigma^2$$

ואין עוד איברים במחלקה כי

$$\tau\tau\sigma^2\tau^{-1} = \tau\sigma^2$$

$$\sigma\tau\sigma^2\sigma^{-1} = \tau$$

באופן דומה מראים ש $\tau\sigma$ ו $\tau\sigma^3$ באותה מחלקה ולכן לסיכום המחלקות
 הן:

$$\{\{id\}, \{\sigma^2\}, \{\sigma, \sigma^3\}, \{\tau, \tau\sigma^2\}, \{\tau\sigma, \tau\sigma^2\}\}$$

7. תהי X קבוצת כל הלוחות 2×2 שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש $2^4 = 16$ לוחות כאלה. ניקח $G = \mathbb{Z}_4$ ונגדיר פעולה באופן הבא: לכל $a \in \mathbb{Z}_4$ הלוח המתקבל $a * x$ הוא סיבוב הלוח x ב $90 \cdot a$ מעלות. מצאו את כל המסלולים (מה האיברים בכל מסלול?). כמה מסלולים יש? טוב. בואו נגיד ש 1 זה שחור ו 0 זה לבן אז המסלולים הם כאלה:

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \text{ :מסלול 1}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & ' & 0 & 1 & ' & 1 & 0 & ' & 1 & 1 \end{matrix} \text{ :מסלול 2}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ' & 0 & 0 & ' & 1 & 0 & ' & 1 & 1 \end{matrix} \text{ :מסלול 3}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ ' & 0 & 1 & ' & 1 & 0 \end{matrix} \text{ :מסלול 4}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ' & 0 & 0 & ' & 0 & 0 & ' & 1 & 0 \end{matrix} \text{ :מסלול 5}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \text{ :מסלול 6}$$