

אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 3

1. קבעו האם המטריצות הבאות הפיכות, אם כן- מצאו את המטריצה ההופכית.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

המטריצה הפיכה, והמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

המטריצה הפיכה, והמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

קבלנו שורת אפסים ולכן המטריצה לא הפיכה.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{4}R_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

המטריצה הפיכה, וההופכית היא $\cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

2. בהנחה ש $ad - bc \neq 0$ מצאו את המטריצה ההפכית של $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
פתרון:

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

אתם יכולים להשתמש בזה מעכשיו כנוסחא.

3. ידוע שאחרי ביצוע 3 הפעולות שורה הבאות על $A_{3 \times 3}$ התקבלה המטריצה I .

$$\begin{aligned} \rho_1 : R_1 &\leftarrow R_1 + 2R_2 \\ \rho_2 : R_2 &\leftrightarrow R_3 \\ \rho_3 : R_3 &\leftarrow \frac{1}{2}R_3 \end{aligned}$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:
לפי טענה מהכיתה = $A^{-1} = \rho_3(I)\rho_2(U)\rho_1(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

4. פתרו את מע' המשוואות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ע"י המטריצה ההופכית.

פתרון:

נכפול במטריצה ההופכית אותה מצאנו בשאלה הראשונה, כופלים מצד שמאל ומקבלים

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. קבעו האם הטענות הבאות הם אמת\שקר ונמקו את קביעתכם:

(א) אם במטריצה ריבועית A יש 2 שורות אותו דבר אז היא לא הפיכה.
אמת. במקרה כזה, נחסר שורה אחת מהשניה ונקבל שורת אפסים בדירוג.

(ב) אם האלכסון של מטריצה יש 1-ים אז המטריצה הפיכה.

שקר. למשל המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

(ג) אם A מטריצה הפיכה אז גם A^{-1} ו- A^2 הפיכות.
אמת. קל לראות ש $(A^{-1})^{-1} = A$ ו $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = A^{-2}$.