1. תרגיל 1

א. תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך שההרכבה $g \circ f$ על. הוכח או הפרך:
g על.
f על.

ב. היעזר בשאלה זו, ובמה שעשינו בכיתה בדומה לזה לגבי חד־חד־ערכיות, והראה שאם פונקציה $f : A \to B$ היא הפיכה אז היא חח"ע ועל.

ג. תהי $f : A \to B$ פונקציה חח"ע ועל. הוכח שהיא הפיכה (רמז: בנה לה את הפונקציה ההופכית)

ד. הערה: בזאת הוכחנו כי פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

פתרון:

א. נראה ש־g על: יהי $c \in C$ נראה כי קיים איבר ב־B כך ש־g שולח את האיבר ל־c, $g \circ f$ על ולכן קיים $a \in A$ כך ש - $g(f(a)) = g \circ f(a) = c$, והמקור של c תחת g הוא $f(a) \in B$.

f לא בהכרח על, למשל: נגדיר $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1\}$ ונגדיר שתי פונקציות $f : A \to B, g : B \to C$ ע"י: $f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1$. ב־$C$ יש רק איבר אחד שמקורו 1, אבל f לא על.

ב. אם f הפיכה אז קיימת $g : B \to A$ כך ש־ $g \circ f = Id_A, f \circ g = Id_B$, כאשר פונקציות הזהות הן תמיד חח"ע ועל.
כעת, ממה שעשינו בכיתה, ומהעובדה ש־$f \circ g$ על נובע ש־f על, ומסעיף א ומהעובדה ש־$g \circ f$ חח"ע נובע ש־f חח"ע.

ג. נגדיר $g : B \to A$ באופן הבא: מהעובדה ש־f על, לכל $b \in B$ קיים מקור $a \in A$ כך ש־$f(a) = b$.
נגדיר $g(b) = a$.g פונקציה היא חד ערכית מכיוון שיש רק מקור אחד, כי f חח"ע, והיא על כי הגדרנו לכל $b \in B$.

2. תרגיל 6

תהי $f : X \to Y$ פונקציה ותהיינה תתי הקבוצות $A_1, A_2 \subseteq X, B_1, B_2 \subseteq Y$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

.

ג. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

ח. $f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)$.

פתרון:

הגדרות:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$
$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A : f(a) = y\}$$

א. הוכחה:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

.

ג. הפרכה: $X=Y=\{1,2\}$ ו־$f(1)=f(2)=1$ ונתבונן ב־$A_1=\{1\},A_2=\{2\}$.
כיוון ש־ $A_1\cap A_2=\phi$ נובע ש־ $f(A_1\cap A_2)=f(\phi)=\phi$. אבל $f(A_1)=f(A_2)=$ $\{1\}$ ולכן $f(A_1)\cap f(A_2)=\{1\}\cap\{1\}=\{1\}\neq\phi$.

ח. הוכחה:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(B_1\triangle B_2) &= \{x\in X \mid f(x)\in (B_1\triangle B_2)\}\\
&= \{x\in X \mid f(x)\in (B_1\backslash B_2)\vee f(x)\in (B_2\backslash B_1)\}\\
&= \{x\in X \mid (f(x)\in B_1\wedge f(x)\notin B_2)\vee (f(x)\in B_2\wedge f(x)\notin B_1)\}\\
&= (\{x\in X \mid f(x)\in B_1\}\setminus\{x\in X \mid f(x)\in B_2\})\cup\\
&\quad\ (\{x\in X \mid f(x)\in B_2\}\setminus\{x\in X \mid f(x)\in B_1\})\\
&= \left(f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2)\right)\cup\left(f^{-1}(B_2)\backslash f^{-1}(B_1)\right)\\
&= x\in f^{-1}(B_1)\triangle f^{-1}(B_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \quad &\in \quad f^{-1}(B_1\triangle B_2) \iff f(x)\in B_1\triangle B_2 \iff f(x)\in B_1\setminus B_2\vee f(x)\in B_2\setminus B_1\\
&\iff (f(x)\in B_1\wedge f(x)\in B_2)\vee(f(x)\in B_2\wedge f(x)\in B_1)\\
&\iff (x\in f^{-1}(B_1)\wedge x\notin f^{-1}(B_2))\vee(x\in f^{-1}(B_2)\wedge x\notin f^{-1}(B_1))\\
&\iff (x\in f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2))\vee(x\in f^{-1}(B_2)\backslash f^{-1}(B_1))\\
&\iff x\in f^{-1}(B_1)\triangle f^{-1}(B_2)
\end{aligned}$$

.

3. תרגיל 5
האם הפונקציות הבאות הן חח"ע? על?
ה. תהי A קבוצה, $B\subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f:P(A)\to P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C)=C\cap B$
ו. תהי A קבוצה, $B\subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f:P(B)\to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C)=C\cup(A\setminus B)$. (להראות דיאגרמות ון)
<u>פתרון:</u>
ה. חח"ע: לא, כי $f(A)=f(B)=B$ זה ברור כי התחום גדול מהטווח.
על: כן: לכל $C\in P(B)$ היא המקור של עצמה (כי $f(C)=C\cap B=C$).
ו. נתייחס ל־A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: כן: (נראה־ אם $C\neq D$ אזי $f(C)\neq f(D)$)
אם $C\neq D\in P(B)$,
אז בלי הגבלת כלליות קיים $x\in C\setminus D$,
$C,D\subseteq B$ ולכן $x\in f(C)$ (כי $x\in C\cup A\backslash B$) וגם $x\notin f(D)$ (כי $x\notin D$ וגם $x\notin A\backslash B$ כי $x\in B$) לכן $x\in f(C)\backslash f(D)$
ולכן $f(C)\neq f(D)$
ולכן f חח"ע.
על: לאו דוקא, לקבוצה הריקה אין מקור כי $B\subset A$ $A\backslash B$ לא ריקה ולכן לכל $D\subseteq B$ $f(B)\neq\phi$.