תרגיל 5 – מתמטיקה בדידה

חלק 1:

בכל אחת מהשאלות הבאות בחרו תשובה אחת בלבד. במקרה שיש יותר מתשובה אחת נכונה, בחרו את התשובה הנכונה והמדוייקת ביותר.
בכל התרגיל עוצמת הרצף, העוצמה א והעוצמה c מייצגות את עוצמת הישר הממשי.

שאלה . יהיו A,B קבוצות כך ש $A \subsetneq B$. אזי:

1. $|A| \leq |B|$ אם ורק אם A,B שתיהן סופיות.
2. $|A| < |B|$.
3. $|A| \leq |B|$.
4. $|A| \leq |B|$ אם ורק אם A,B שתיהן אינסופיות.

פתרון: 3.

שאלה . נסמן $c = |\mathbb{R}|$, $A = \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ פונקציה$\}$, $B = \{g \mid g : \mathbb{Q} \to A$ פונקציה$\}$. למה שווה $|B|$?

1. $2^{(2^c)}$.
2. $\aleph_0$.
3. 2^c.
4. c.

פתרון: 4.

שאלה . תהא c עוצמת הרצף. עוצמת הקבוצה $(\{2,3\} \times \mathbb{N}) \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ היא:

1. 2^c.
2. $\aleph_0^c$.
3. c.
4. c^c.

פתרון: 3.

שאלה . נניח ש $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, וכן $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. נתבונן בטענות הבאות:

(א) אם X אינה בת־מניה, אז יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש X_n אינה בת־מניה.

(ב) אם X אינסופית, אז יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש X_n אינסופית.

(ג) אם Y_n אינסופית לכל n, אז Y אינסופית.

(ד) אם $|Y_n| > \aleph_0$ לכל n, אז $Y \neq \emptyset$.

אזי בהכרח:

1. טענה (ד) מתקיימת.
2. טענה (א) מתקיימת.
3. טענות (ב) וכן (ג) מתקיימות.
4. טענות (א) וכן (ד) מתקיימות.

פתרון: 2.

שאלה . יהיו A, B, C קבוצות אינסופיות. אזי

1. הטענה ב (3) נכונה, אבל רק כאשר B, C זרות.
2. $|A| + |B| + |C| < |A| \cdot |B| \cdot |C|$.
3. $|A^{B\cup C}| = |A|^{\max\{|B|,|C|\}}$.
4. תשובות (2) ו (3) נכונות.

פתרון: 3.

חלק 2:

בכל אחת מהשאלות הבאות, בחרו את התשובה הנכונה. הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה. מהי עוצמת קבוצות היחסים הבאות? הוכיחו.

א. קבוצת היחסים מעל הטבעיים המכילים בדיוק זוג סדור אחד.
ב. קבוצת היחסים מעל הטבעיים המכילים מספר סופי של זוגות סדורים.
ג. קבוצת כל היחסים מעל הטבעיים.

פתרון:

א. אינסופית בת מניה.

הוכחה: הפונקציה מקבוצה זו לקבוצה $N \times N$, המתאימה לכל יחס כנ"ל את הזוג הסדור היחיד השייך לו היא חח"ע ועל.

ב. אינסופית בת מניה.

הוכחה: נסמן ב A את קבוצת היחסים מעל הטבעיים המכילים מספר סופי של זוגות סדורים.
לכל n טבעי נגדיר את A_n להיות קבוצת היחסים הלא ריקים מעל הטבעיים המכילים לכל היותר n זוגות סדורים.
נגדיר פונקציה:

ע"י: $f:(N\times N)^{\{1,...,n\}}\to A_n$
$$g\to \mathrm{Im}(g)$$

כלומר, כל פונקציה $g\in (N\times N)^{\{1,...,n\}}$ עוברת לתמונה שלה.
נשים לב, $\mathrm{Im}(g)=\{g(1),g(2),...,g(n)\}$. לכל $1\le i\le n$, $g(i)$ הוא זוג סדור של מספרים טבעיים. לכן, $\mathrm{Im}(g)\subseteq N\times N$ היא קבוצה של לכל היותר n זוגות סדורים שונים. לכן f אכן מעבירה כל $g\in (N\times N)^{\{1,...,n\}}$ ל איבר ב A_n.

g הינה פונקציה על (מדוע?) לכן, $\left|A_n\right|\le\left|(N\times N)^{\{1,...,n\}}\right|=\left|(N\times N)\right|^{\left|\{1,...,n\}\right|}=\aleph_0{}^n=\aleph_0$

לכן, לכל n טבעי, A_n היא בת מניה.
מכיוון ש $A=\{\phi\}\cup\bigcup_{n\in N}A_n$ איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה, A בת מנייה.
מכיוון ש A מכילה את הקבוצה מסעיף א', A אינסופית. לכן A אינסופית בת מניה.

ג. עוצמת הרצף.

הוכחה: R הוא יחס מעל N אמ"ם $R\subseteq N\times N$ אמ"ם $R\in P(N\times N)$.
כלומר, קבוצת היחסים מעל הטבעיים, היא קבוצת החזקה $P(N\times N)$. עוצמתה:
$$|P(N\times N)|=2^{|N\times N|}=2^{\aleph_0}=\aleph$$

שאלה. סדרה בינארית אינסופית היא סדרה אינסופית בת מניה של אפסים ואחדים.
מהי עוצמת הקבוצות הבאות? הוכיחו.
א. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות שאינן מכילות את הרצפים "01" ו "00".
ב. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות שאינן מכילות את הרצף "01".
ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות שאינן מכילות את הרצף "00".

פתרון:
א. סופית.

הוכחה: נסמן ב A את קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות שאינן מכילות את הרצפים "01" ו "00".
ברור כי הסדרה ....111111 שייכת ל A.
טענה: לכל $x\in A$ הספרה "0" לא מופיעה ב x.
הוכחה: אחרת, קיים מיקום i בו הספרה "0" מופיעה ב x. במיקום $i+1$ תופיע הספרה "0" או הספרה "1". בשני המקרים נקבל סתירה. מש"ל.
לכן, הסדרה היחידה השייכת ל A היא הסדרה ....111111.
בפרט A סופית מעוצמה אחת.

ב. אינסופית בת מניה.

הוכחה: נסמן ב B את קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות שאינן מכילות את הרצף "01".
אזי לכל שרשרת בינארית X בקבוצה B מתקיים, אם "0" מופיע ב X, גם כל הספרות שאחריו הן אפסים.
לכן, האיברים ב B הם מהצורה:

* $111111.......$ - "0" לא מופיע בסדרה.
* n האיברים הראשונים הם אחדים וכל השאר אפסים.
* הכל אפסים.

נגדיר פונקציה:
$f: B \to N \cup \{0\}$ ע"י
לכל, שרשרת X ב B, אם "0" לא מופיע ב X, אז $f(X)=0$.
אחרת, $f(X)$ יהיה המיקום הראשון בו "0"
מופיע בסדרה.

f חח"ע (בדקו!) לכן $|B| \le |N \cup \{0\}| = \aleph_0$ ו B בת מניה. מכיוון ש B אינסופית (מדוע?), היא אינסופית בת מניה.

ג. עוצמת הרצף.

הוכחה: נסמן ב C את הקבוצה המתוארת. אברי הקבוצה C הם מחרוזות בינאריות בהן כל תו "0" מפריד בין רצפים של אחדים.
כלומר, מחרוזות מהצורה:
$$\underbrace{1...1}_{n_1 \in N_0}0\underbrace{1...1}_{n_2 \in N}0\underbrace{1...1}_{n_3 \in N}0\underbrace{1...1}_{n_4 \in N}0...........$$
כאשר מחרוזת כנ"ל יכולה להיגמר באינסוף אחדים או במקטעים סופיים של אחדים מופרדים ע"י אפסים.
נגדיר פונקציה מקבוצת המחרוזות האינסופיות מעל הטבעיים (כלומר, מהקבוצה N^N) לקבוצה C ע"י:
מחרוזת מהצורה $a_1a_2a_3........$ (כאשר a_i טבעי לכל $i \in N$) עוברת למחרוזת
$\underbrace{1...1}_{a_1 \in N}0\underbrace{1...1}_{a_2 \in N}0\underbrace{1...1}_{a_3 \in N}0\underbrace{1...1}_{a_4 \in N}0...........$.
ברור כי הפונקציה חח"ע לכן, $C \ge \left|N^N\right| = {\aleph_0}^{\aleph_0} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. מצד שני,
$C \subseteq \{0,1\}^N$ לכן, $|C| \le 2^{\aleph_0} = \aleph$. לכן: $|C| = \aleph$.

שאלה. ביש העכביש נמצא במישור. כל שנייה הוא זז בקפיצה יחידה אחת במקביל לאחד הצירים. נניח כי ביש מתחיל את מסעו מראשית הצירים וכי הוא חי לנצח והולך ללא הפסקה. מהי עוצמת קבוצת הנקודות בהן יכול ביש לבקר במסעו?

פתרון:
אינסופית ובת מניה.

הסבר: זוהי קבוצת כל הנקודות במישור בעלות שיעורים שלמים. כלומר, הקבוצה Z^2 (וראינו שהיא בת מניה)

שאלה. מהי עוצמת קבוצת המסעות האפשריים של העכביש מהשאלה הקודמת?

פתרון: עוצמת הרצף.

הוכחה: ניצור התאמה חח"ע ועל בין קבוצת המסעות האפשריים לקבוצת המחרוזות האינסופיות המורכבות מהספרות 0,1,2,3 (כלומר, לקבוצה $\{0,1,2,3\}^N$):

כל צעד מתאים לאות במחרוזת. 0 – הליכה ימינה, 1 – למטה, 2- שמאלה, 3 – למעלה.
מכיוון ש $\left|\{0,1,2,3\}^N\right| = 4^{\aleph_0} = \aleph$ זוהי עוצמת קבוצת המסעות האפשריים של העכביש.

שאלה.
א. האם קיימת קבוצה אינסופית אך בת מניה של מעגלים במישור כך שקבוצת נקודות החיתוך שלהם אינה בת מניה?
ב. האם קיימת קבוצה אינסופית אך בת מניה של משולשים במישור כך שקבוצת נקודות החיתוך של השפות שלהם אינה בת מניה?

פתרון:
א. לא.

הסבר: תהי A קבוצה אינסופית אך בת מניה של מעגלים במישור. אזי, כל זוג מעגלים ב A חותכים זה את זה לכל היותר בשתי נקודות. לכן, עוצמת קבוצת נקודות החיתוך היא לכל היותר $2\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$.

פורמלית: נראה כי עוצמת קבוצת נקודות החיתוך של המעגלים ב A היא בת מנייה.
נסמן קבוצה זו ב I ונגדיר פונקציה $f:\{0,1\}\times(A\times A)\to I\cup\{0\}$ ע"י,
לכל, שני מעגלים $C_1, C_2 \in A$:
1. אם $C_1 = C_2$ נגדיר, $f(0,(C_1,C_2)) = f(1,(C_1,C_2)) = 0$.
2. אם $C_1 \neq C_2$ ואין להם נקודות חיתוך נגדיר $f(0,(C_1,C_2)) = f(1,(C_1,C_2)) = 0$.
3. אם $C_1 \neq C_2$ ויש להם נקודת חיתוך יחידה $x \in I$, נגדיר
$f(0,(C_1,C_2)) = f(1,(C_1,C_2)) = x$.
4. אם $C_1 \neq C_2$ ויש להם שתי נקודות חיתוך שונות $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ כך ש $x<y$ בסדר המילוני, נגדיר: $f(0,(C_1,C_2)) = x,\ f(1,(C_1,C_2)) = y$.

הפונקציה f מוגדרת היטב.
מכיוון שכל נקודה ב I היא נקודת חיתוך של שני מעגלים, הפונקציה היא פונקציה על (ל 0 בהכרח יש מקור).
לכן, $|I\cup\{0\}| \leq |\{0,1\}\times(A\times A)| = \aleph_0$. מכיוון ש $I \subseteq I\cup\{0\}$, $|I| \leq \aleph_0$ ו I בת מנייה.

ב. כן.
הוכחה: נתבונן בקבוצת המשולשים ישרי הזווית שאחד הניצבים שלהם הוא הקטע $[0,1]$ על ציר האיקס והניצב השני הוא הקטע $[0,n]$ על ציר ה y .
הקבוצה בת מנייה.
הקטע $[0,1]$ על ציר האיקס מוכל בקבוצת נקודות החיתוך של שפות המשולשים הנ"ל והוא אינו בן מנייה. לכן קבוצת נקודות החיתוך אינה בת מנייה.

שאלה. לגבי כל אחת מהקבוצות המתוארות להלן קבעו האם היא בת מניה או לא.
א. קבוצת כל תת הקבוצות הסופיות של קבוצת המספרים הטבעיים N .
ב. קבוצת כל תת הקבוצות האינסופיות של קבוצת המספרים הטבעיים N .
ג. $S=\{A\subseteq N : |A|=\aleph_0 \quad \wedge \quad \forall x,y\in A, \quad x\neq y \Rightarrow |x-y|\geq 17\}$
ד. $S=\{A\subseteq N : |A|=\aleph_0 \quad \wedge \quad \forall x,y\in A \quad 17 | (x-y)\}$

פתרון:
א. בת מניה

הוכחה: הקבוצה המתוארת היא הקבוצה: $A=\{B\subseteq N:|B|<\aleph_0\}$. נראה כי A בת מנייה.

לכל $n\in N$ נגדיר: $A_n=\{B\subseteq N: B\neq\phi \wedge |B|\leq n\}$. אזי $A=\{\phi\}\cup\bigcup_{n\in N}A_n$.

נראה כי לכל $n\in N$ A_n היא בת מנייה.

לכל $n\in N$, נגדיר פונקציה $f_n:N^n\to A_n$ ע"י:

הסדרה $a_1,...,a_n$ עוברת לקבוצה $\{a_1,...,a_n\}$.

אזי, f_n היא פונקציה על (בדקו!).

לכן, לכל $n\in N$, $|A_n|\leq|N^n|=\aleph_0{}^n=\aleph_0$ ו A_n היא בת מנייה.

לכן, $\bigcup_{n\in N}A_n$ בת מנייה כאיחוד בן מנייה של קבוצות בנות מניה.

לכן, $A=\{\phi\}\cup\bigcup_{n\in N}A_n$ בת מנייה כאיחוד של שתי קבוצות בנות מניה.

ב. לא בת מניה

הוכחה: הקבוצה המתוארת היא הקבוצה:

$B=\{C\subseteq N:|C|\geq\aleph_0\}=\{C\subseteq N:|C|=\aleph_0\}$.

ברור כי כל איבר בקבוצת החזקה $P(N)$ שייך או לקבוצה A מסעיף א' או לקבוצה B, אך לא לשתיהן. לכן, $P(N)=A\cup B$ כאשר האיחוד הוא איחוד זר.

לכן,

$$\aleph=|P(N)|=|A\cup B|=|A|+|B|=\max\{|A|,|B|\}$$

טענה: B קבוצה אינסופית.

הוכחה: הפונקציה $f:N\to B$ המעבירה $n\in N$ לקבוצה $N\setminus\{n\}$ היא חח"ע.

לכן, מכיוון ש B אינסופית ו A בת מנייה, $|B|\geq|A|$ ומתקיים:

$$\aleph=|P(N)|=|A\cup B|=|A|+|B|=\max\{|A|,|B|\}=|B|$$

כלומר, $|B|=\aleph$.

ג. לא בת מניה

הוכחה: נגדיר פונקציה f מהקבוצה B מהסעיף הקודם לקבוצה $S=\{A\subseteq N:|A|=\aleph_0 \quad \wedge \quad \forall x,y\in A,\quad x\neq y\Rightarrow|x-y|\geq 17\}$. ע"י:

קבוצה $C\in B$ עוברת לקבוצה $D_C=17C=\{17x:x\in C\}$.

מ"ל: f מוגדרת היטב וחח"ע.

מוגדרת היטב: אם $C\in B$, C אינסופית. לכן, הקבוצה $17C$ אינסופית.

(אכן, קיימת פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה C לקבוצה $17C$ המעבירה x ל $17x$, לכן $|17C|=|C|$).

בנוסף, לכל $y_1,y_2\in 17C$ שונים, קיימים $x_1,x_2\in C$ שונים כך ש $y_1=17x_1, y_2=17x_2$.

לכן, $|y_1-y_2|=|17x_1-17x_2|=17|x_1-x_2|\geq 17\cdot 1=17$. לכן, $17C\in S$.

חח"ע: יהיו $C_1,C_2\in B$ שונות. מ"ל: $17C_1\neq 17C_2$.

אבל, $C_1\neq C_2 \Leftarrow$ קיים $x\in C_1\setminus C_2$ או קיים $x\in C_2\setminus C_1$. בה"כ: קיים $x\in C_1\setminus C_2$.

אבל, $x\in C_1 \Leftarrow 17x\in 17C_1$

ו $17x\notin 17C_2 \Leftarrow x\notin C_2$ (אחרת, קיים $y\in C_2$ כך ש $x\in C_2 \Leftarrow y=x \Leftarrow 17x=17y$ סתירה).

לכן, $17C_1\neq 17C_2$.

מכיוון ש f חח"ע, $|S|\geq|B|=\aleph$ ובפרט S אינה בת מניה.

ד. לא בת מניה

הוכחה: הפונקציה מהסעיף הקודם מתאימה גם לסעיף זה.

יותר בפירוט, נגדיר פונקציה f מהקבוצה B מסעיף ב' לקבוצה

$S=\{A\subseteq N:|A|=\aleph_0 \quad \wedge \quad \forall x,y\in A \quad 17|(x-y)\}$. ע"י:

קבוצה $C\in B$ עוברת לקבוצה $D_C=17C=\{17x:x\in C\}$.

מ"ל: f מוגדרת היטב וחח"ע.

חח"ע הוכחנו בסעיף הקודם (חח"ע לא תלויה בטווח).

מוגדרת היטב: אם $C\in B$, C אינסופית. לכן, הקבוצה $17C$ אינסופית.

בנוסף,אם $y_1,y_2\in 17C$, אז קיימים $x_1,x_2\in C$ כך ש $y_1=17x_1, y_2=17x_2$.

לכן, $(y_1-y_2)=(17x_1-17x_2)=17(x_1-x_2)$. ו $17|(y_1-y_2)$ לכן, $17C\in S$.

בהצלחה!☺