

פתרון תרגיל בית 12 – לוגיקה

תרגיל 1

הוכיחו את הטענות הבאים (בשיטת הדדוקציה הטבעית) באמצעות 9 כללי ההיסק:

א.

1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow s$
3. $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s) \quad / \therefore q \vee s$
4. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \quad 1, 2, \text{Conj.}$
5. $p \vee r \quad 3, \text{Simp.}$
6. $q \vee s \quad 4, 5, \text{C.D.}$

ב.

1. $p \rightarrow q$
2. $p \vee (q \vee \neg r)$
3. $\neg q \quad / \therefore \neg r \wedge \neg q$
4. $\neg p \quad 1, 3, \text{M.T.}$
5. $q \vee \neg r \quad 2, 4, \text{D.S.}$
6. $\neg r \quad 3, 5, \text{D.S.}$
7. $\neg r \wedge \neg q \quad 3, 6, \text{Conj.}$

ג.

1. $(r \rightarrow \neg s) \wedge (t \rightarrow \neg p)$
2. $(q \rightarrow \neg u) \wedge (k \rightarrow \neg m)$
3. $(\neg u \rightarrow \neg t) \wedge (\neg s \rightarrow \neg p)$
4. $q \vee r \quad / \therefore \neg t \vee \neg p$
5. $r \rightarrow \neg s \quad 1, \text{Simp.}$
6. $q \rightarrow \neg u \quad 2, \text{Simp.}$
7. $(q \rightarrow \neg u) \wedge (r \rightarrow \neg s) \quad 5, 6, \text{Conj.}$
8. $\neg u \vee \neg s \quad 4, 7, \text{C.D.}$
9. $\neg t \vee \neg p \quad 3, 8, \text{C.D.}$

תרגיל 2

הצרינו והוכיחו (באמצעות שיטת הדדוקציה הטבעית) את הטענות הבאים (לא לשכוח לרשום את המילון!):

1. אם ג'ורג' או הרברט זוכים במשחק, הרי שגם ג'ק וגם בובי מפסידים. ג'ורג' זכה במשחק. לכן ג'ק הפסיד.

מילון:

p – ג'ורג' זוכה

q – הרברט זוכה

r – ג'ק מפסיד

s – בובי מפסיד

הצרנה:

$$1. (p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$$

$$2. p \quad / \therefore r$$

הוכחה:

$$1. (p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$$

$$2. p \quad / \therefore r$$

$$3. p \vee q \quad 2, \text{Add.}$$

$$4. r \wedge s \quad 1, 3, \text{M.P.}$$

$$5. r \quad 4, \text{Simp.}$$

2. אם דני קיבל את ההזמנה של רינה, זה אומר שהוא טס במטוס, ואם הוא טס במטוס, אז הוא לא יאחר לפגישה עם רינה. אם בהזמנה שרינה שלחה לו הייתה טעות אז דני יאחר לפגישה. דני קיבל את ההזמנה מרינה או שהייתה טעות בהזמנה שלה. לכן דני טס במטוס או שהוא יאחר לפגישה עם רינה.

מילון:

p – דני קיבל את ההזמנה של רינה

q – דני טס במטוס

r – דני יאחר לפגישה עם רינה

s – בהזמנה שרינה שלחה הייתה טעות

הצרנה:

$$1. (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$$

$$2. s \rightarrow r$$

$$3. p \vee s \quad / \therefore q \vee r$$

הוכחה:

1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$
2. $s \rightarrow r$
3. $p \vee s$ / $\therefore q \vee r$
4. $p \rightarrow q$ 1, *Simp.*
5. $(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow r)$ 2, 4, *Conj.*
6. $q \vee r$ 3, 5, *C.D.*

3. אם נתן קונה את המגרש, הרי שייבנה על המגרש בנין משרדים. אם פני קונה את המגרש, אז המגרש יימכר שוב במהרה. אם רוני קונה את המגרש אז על המגרש ייבנה מתחם-חנויות, ואם ייבנה מתחם-חנויות, אז תמי תציע לשכור את המתחם. נתן או רוני יקנו את המגרש. לכן ייבנה על המגרש בנין משרדים או שייבנה על המגרש מתחם-חנויות.
מילון:

- p – נתן קונה את המגרש
 - q – ייבנה על המגרש בנין משרדים
 - r – פני קונה את המגרש
 - s – המגרש יימכר שוב במהרה
 - t – רוני קונה את המגרש
 - m – על המגרש ייבנה מתחם חנויות
 - k – תמי תציע לשכור את המתחם
- הצרנה:

1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow s$
3. $(t \rightarrow m) \wedge (m \rightarrow k)$
4. $p \vee t$ / $\therefore q \vee m$

הוכחה:

1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow s$
3. $(t \rightarrow m) \wedge (m \rightarrow k)$
4. $p \vee t$ / $\therefore q \vee m$
5. $t \rightarrow m$ 3, *Simp.*
6. $(p \rightarrow q) \wedge (t \rightarrow m)$ 1, 5, *Conj.*
7. $q \vee m$ 4, 6, *C.D.*

4. אם אן נמצאת בוועדה אז גם בטי נמצאת בוועדה. אם אן ובטי שתיהן נמצאות בוועדה, אזי קרליין או דוריס תיבחרנה לנשיאות. אם קרליין או דוריס תיבחרנה לנשיאות, אזי אמילי איננה שולטת בבחירות. אם העובדה שאן נמצאת בוועדה גוררת את העובדה שאמילי איננה שולטת

בבחירות, אז פלורנס תהיה הנשיאה החדשה. לכן פלורנס תהיה הנשיאה החדשה.

מילון:

$-p$ –אן נמצאת בוועדה

$-q$ –בטי נמצאת בוועדה

$-r$ –קרליין תיבחר לנשיאות

$-s$ –דוריס תיבחר לנשיאות

$-t$ –אמילי שולטת בבחירות

$-m$ –פלורנס תהיה הנשיאה החדשה

הצרנה:

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

$$3. (r \vee s) \rightarrow \neg t$$

$$4. (p \rightarrow \neg t) \rightarrow m \quad / \therefore m$$

הוכחה:

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

$$3. (r \vee s) \rightarrow \neg t$$

$$4. (p \rightarrow \neg t) \rightarrow m \quad / \therefore m$$

$$5. p \rightarrow (p \wedge q) \quad 1, Abs.$$

$$6. p \rightarrow (r \vee s) \quad 2, 5, H.S.$$

$$7. p \rightarrow \neg t \quad 3, 6, H.S.$$

$$8. m \quad 4, 7, M.P.$$

תרגיל 3

השלימו את ההוכחות של הטענות הבאים (תוך שימוש בכל הכללים שלמדנו):

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $(p \rightarrow r) \rightarrow s$
3. $\neg q \vee t$ $/ \therefore q \rightarrow (s \wedge t)$
4. $(q \wedge p) \rightarrow r$ 1, *Com.*
5. $q \rightarrow (p \rightarrow r)$ 4, *Exp.*
6. $q \rightarrow s$ 2, 5, *H.S.*
7. $\neg q \vee s$ 6, *Impl.*
8. $(\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee t)$ 3, 7, *Conj.*
9. $\neg q \vee (s \wedge t)$ 8, *Dist.*
10. $q \rightarrow (s \wedge t)$ 9, *Impl.*

1. $p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
2. $p \leftrightarrow q$ $/ \therefore \neg p \wedge \neg q$
3. $p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg q)$ 1, *Trans*
4. $p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ 3, *D.N.*
5. $(p \wedge p) \rightarrow \neg q$ 4, *Exp.*
6. $p \rightarrow \neg q$ 5, *Taut.*
7. $\neg p \vee \neg q$ 6, *Impl.*
8. $\neg(p \wedge q)$ 7, *DeM.*
9. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 2, *Equiv.*
10. $\neg p \wedge \neg q$ 8, 9, *D.S.*