פתרון תרגיל בית מספר 7

<u>שאלה 1</u>

נניח בשלילה שקיים $u \in U$ ו $u \notin cl(A \cap U)$. אזי קיימת סביבה פתוחה O של u כך ש $A \cap O \cap U = \varnothing$. כעת, U פתוחה ו- $u \in U$ ולכן גם U סביבה פתוחה של u. לכן, $V := U \cap O$ סביבה פתוחה של u המקיימת $A \cap V = \varnothing$. בסתירה לכך ש A צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא: A צפופה אם ורק אם $A \cap W \neq \varnothing$ לכל W פתוחה ולא ריקה. אצלנו, V פתוחה ולא ריקה).

מכאן $U \subseteq cl(A \cap U)$

<u>**הוכחת המסקנה:**</u> $A \cap U \subseteq U$ ומכאן $cl(A \cap U) \subseteq cl(U)$ נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

$cl(A \cap U)$ סגורה המכילה את U ומכאן $cl(U) \subseteq cl(A \cap U)$. בסה"כ $cl(U) = cl(A \cap U)$.

<u>שאלה 2</u>

א)⇐ב): יהיו $F \subseteq X$ קבוצה סגורה, $U \subseteq X$ פתוחה כך ש $F \subseteq U$. אזי F, U^C סגורות וזרות. מהנתון בסעיף א' נקבל שקיימות W, V פתוחות וזרות כך ש $U^C \subseteq W$, $F \subseteq V$. לכן $V \subseteq W^C \subseteq U$ ומכיון ש W^C סגורה נקבל לבסוף: $F \subseteq V \subseteq cl(V) \subseteq W^C \subseteq U$.

ב)⇐א): תהיינה $F, G \subseteq X$ סגורות וזרות. אזי F^C פתוחה וכן $G \subseteq F^C$. נקבל מההנחה שקיימת פתוחה V כך ש $G \subseteq V \subseteq cl(V) \subseteq F^C$. תהי, $U = (cl(V))^C$ אזי U פתוחה $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ ו V פתוחה וכן $U \cap V = \varnothing$ ומצאנו את ההפרדה הדרושה (עבור סעיף א').

<u>שאלה 3</u>

הוכחתם בהרצאה ש $T_2 \Rightarrow T_1$ ללא צורך בתנאי נוסף ומכאן שמ"ל שאם X סופי אז $T_1 \Rightarrow T_2$. תכונת T_1 שקולה לכך שכל נקודון סגור. כעת מכיון ש X סופי נקבל דרך איחודים <u>**סופיים**</u> של נקודונים שכל תת קבוצה $A \subseteq X$ היא סגורה וזה שקול לכך ש המרחב דיסקרטי. כל מרחב דיסקרטי הוא האוסדורף (למה?).

שאלה 4

המרחב מקיים את תכונת ההפרדה T_1 ואינו מקיים T_2.

מקיים T_1: כל תת קבוצה בת מניה סגורה במרחב ובפרט כל הנקודונים סגורים וזהו תנאי שקול ל T_1.

לא מקיים T_2: נניח בשלילה שהמרחב האוסדורף. מכיון ש $|X| > \aleph_0$ בפרט קיימות שתי נקודות שונות x, y השייכות ל X. מכיון שהמרחב האוסדורף (לפי ההנחה בשלילה) קיימות $U, V \in \tau_{co-\aleph_0}$ <u>זרות</u> כך ש $y \in V \quad x \in U,$. כעת, U, V פתוחות ולא ריקות ומכאן U^C, V^C בנות מניה. אבל $U \cap V = \varnothing$ ומכאן $U^C \cup V^C = X$. נקבל ש X קבוצה בת מניה כאיחוד סופי של בנות מניה בסתירה לנתון (ש X אינה בת מניה).

שאלה 5

א. יהיו $x_1 \neq x_2 \in X$. f חח"ע ומכאן $f(x_1) \neq f(x_2) \in Y$. Y האוסדורף ולכן קיימות U, V סביבות זרות של $f(x_1), f(x_2)$ בהתאמה. f רציפה ולכן $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ סביבות של x_1, x_2 והן זרות שכן $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

ב. נניח שהמרחב האוסדורף ונניח בשלילה שקיים $x \in X$ כך שחיתוך כל הסביבות הסגורות של x מכיל איבר y השונה מ x. $x \neq y$ לכן מתכונת האוסדורף קיימות U, V פתוחות וזרות כך ש $x \in U, y \in V$. כעת $U \cap V = \varnothing$. מכאן $U \subseteq V^C$. נקבל ש V^C סביבה סגורה של x (כי מכילה את U שהיא סביבה פתוחה של x) ומצד שני $y \notin V^C$. בסתירה לכך ש y שייכת לחיתוך כל הסביבות הסגורות של x.

בכיוון ההפוך: נוכיח האוסדורף. יהיו $x \neq y \in X$. מכיון שלכל $x \in X$ חיתוך כל הסביבות הסגורות של x הוא בדיוק $\{x\}$ נקבל שקיימת סביבה סגורה F של x כך ש $y \notin F$ אזי F^C סביבה פתוחה של y הזרה ל F שהינה סביבה של x.

שאלת בונוס:

סימון: $cl_Y(M)$ הוא הסגור של קבוצה M במרחב Y.

טענת עזר (לא נוכיח)

יהי Y מ"ט. $M \subseteq Z \subseteq Y$ אזי מתקיים:

$cl_Z(M) = cl_Y(M) \cap Z$.

יהי $A \subseteq X$ ת"מ פתוח של המרחב הפתיר X. נראה ש A פתיר. $X = B \dot{\cup} C$ (איחוד זר) באשר B,C צפופות ב X. מתקיים $A = A \cap X = A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$. ברור שהאיחוד זר. נותר להוכיח ש $A \cap B, A \cap C$ צפופות ב A. נראה רק ש $A \cap B$ צפופה ב A. (באופן דומה מראים לגבי $A \cap C$). A פתוחה ב X ו B צפופה ב X. ולכן משאלה 1 נקבל ש $cl_X(A \cap B) = cl_X(A)$. כעת מטענת העזר נקבל ש

$cl_A(A \cap B) = cl_X(A \cap B) \cap A = cl_X(A) \cap A = A$. (שימו לב: $A \subseteq cl_X(A)$ ומכאן השוויון האחרון). קיבלנו ש: $cl_A(A \cap B) = A$ כלומר $A \cap B$ צפופה ב A כדרוש.