תרגיל 6

24 בנובמבר 2015

1. יהיו R, S מעל $A \times B$. (הגדרה: $R^{-1} \subseteq B \times A$ מוגדר להיות $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$)
   א. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
   ב. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
   ג. $R \cap R^{-1}$ ו- $R \cup R^{-1}$ סימטריים.

2. א. הוכיחו כי יחס R טרנזיטיבי אם"ם $R^2 \subseteq R$
   ב. הוכיחו כי אם R טרנזטיבי אזי R^n טרנזיטיבי לכל n.

פיתרון:

נוכיח תחילה טענת עזר:

R טרנזטיבי אמ"מ $R^2 \subseteq R$

הוכחה:

$(\Rightarrow)$: אם R טרנזיטיבי:

יהי

$$\begin{array}{rcl} (x,z) & \in & R^2 \\ & \Downarrow & \\ \exists y \in A, (x,y) \in R & \wedge & (y,z) \in R \\ & \Downarrow & \\ (x,z) & \in & R \\ & \Downarrow & \\ R^2 & \subseteq & R \end{array}$$

$(\Leftarrow)$: נניח כי $R^2 \subseteq R$:

יהי

$$\begin{array}{rcl} (x,y), (y,z) & \in & R \\ & \Downarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(x,z) & \in & R^2 \\ & \Downarrow & \\ (x,z) & \in & R\end{array}$$

לכן גם $R^n = RR^{n-1} \subseteq R^2 R^{n-1} = R^{n+1}$ ולכן R^n טרנזטיבי.

3. E הוא יחס על הקבוצה A, היחס F מוגדר על $P(A) \setminus \{\phi\}$ ע"י $(A,B) \in F$ אס"ם קיימים $a \in A$, $b \in B$ כך ש־$(a,b) \in E$.
הוכח או הפרך אם E טרנזטיבי אזי F הוא טרנזטיבי.
פתרון:

הפרכה: $A = \{1,2\}$ $E = \{(1,2)\}$ $F = \{(\{2\},\{1\})\}$

אם תנסו להוכיח כך: יהיו $(A,B),(B,C) \in F$ צ"ל $(A,C) \in F$:

על פי הגדרת F קיימים $a \in A, b_1 \in B, b_2 \in B, c \in C$ כך ש־ $(a,b_1),(b_2,c) \in E$
b_1 לא בהכרח שווה ל־b_2 ולכן הנתון ש־E טרנזטיבי לא יעזור כאן...