אנליזה מודרנית
פתרון תרגיל 7

תרגיל 1 השאלה הזו לוקחת אותנו קצת אחורה בחומר, אבל היא חשובה מאוד.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים.

1. E מדידה לבג.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה $E \subseteq \mathcal{O}$ ב־$\mathbb{R}$, עבורה $m^*(\mathcal{O} \backslash E) < \varepsilon$.
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה $S \subseteq E$ סגורה ב־$\mathbb{R}$, עבורה $m^*(E \backslash S) < \varepsilon$.
4. קיימת קבוצה $G \in G_\delta$ כך ש־$E \subseteq G$ וגם $m^*(G \backslash E) = 0$.
5. קיימת קבוצה $F \in F_\sigma$ כך ש־$F \subseteq E$ וגם $m^*(E \backslash F) = 0$.

הוכחה. נוכיח זאת מספר חלקים. ראשית נוכיח כי $(1) \implies (2) \implies (4) \implies (1)$

$(1 \implies 2)$ נניח ש־E מדידה לבג ו־$m^*(E) < \infty$. בגלל ש־E מדידה אפשר להשתמש ב־m. יהי $\varepsilon > 0$. אזי, קיימת קבוצה פתוחה $E \subseteq \mathcal{O}$ כך ש־$m(\mathcal{O}) < m(E) + \varepsilon$.[1] E מדידה ו־$\mathcal{O}$ מדידה כקבוצה פתוחה. בגלל ש־$m(E) < \infty$, נקבל ש־$m(\mathcal{O}) - m(E) < \varepsilon$. בגלל ש־$\mathcal{O}$ ו־E מדידות וממידה סופית, אז

$$m(\mathcal{O} \backslash E) = m(\mathcal{O}) - m(E) < \varepsilon$$

וקיבלנו את הדרוש כאשר $m(E) < \infty$.

כעת, נוכיח זאת עבור E ממידה כלשהי. ניתן לפרק את $\mathbb{R}$ למספר בן מנייה של קטעים חצי פתוחים חצי סגורים זרים E_n,[2] כאשר כל קטע פתוח הוא ממידה סופית. לכן, מן הטענה שהוכחנו קודם, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $E \cap E_n \subseteq \mathcal{O}_n$ קבוצה פתוחה כך ש־

$$m\left(\mathcal{O}_n \backslash (E \cap E_n)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

נגדיר $\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$. קל לראות ש־$\mathcal{O}$ מכילה כל $E \cap E_n$, ולכן מכילה את $E = E \cap \mathbb{R} = E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap E_n$. מתקיים:

$$m\left(\mathcal{O} \backslash E\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n \backslash \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E \cap E_m\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\mathcal{O}_n \backslash \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E \cap E_m\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\mathcal{O}_n \backslash (E \cap E_n)\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

---

[1] זה נובע ישירות מהגדרת m^*, שכן היא inf של מידת אוסף בן מניה של קטעים פתוחים המכיל את E.

[2] למשל, $[-n, n+1)$ כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

כאשר השיוויון הראשון נובע מההגדרה של הקבוצה $\mathcal{O}$ ומהעובדה ש־$E = E\cap\mathbb{R} = E\cap\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E\cap E_n$, הצעד השני נובע מ־$\sigma$ חיבוריות מוחלשת, והצעד השלישי נובע מכך ש$E\cap E_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E\cap E_m$ ולכן $\mathcal{O}_n\backslash\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E\cap E_m \subseteq \mathcal{O}_n\backslash(E\cap E_n)$.

ולכן, סה"כ הוכחנו $(2 \implies 1)$.

$(4 \implies 2)$ לפי ההנחה, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה פתוחה $E\subseteq\mathcal{O}_n$ כך ש־$m^*(\mathcal{O}_n\backslash E) < \frac{1}{n}$. נגדיר $G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_n$. מתקיים ש־$G\in G_\delta$, ומתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$m^*(G\backslash E) = m^*\left(\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_m\right)\backslash E\right) \le m^*\left(\mathcal{O}_n\backslash E\right) < \frac{1}{n}$$

ולכן $m^*(G\backslash E) < \frac{1}{n}$ וזה נכון לכל n, ולכן $m^*(G\backslash E)$, **ולכן הוכחנו את הדרוש.**

$(1 \implies 4)$ קיימת קבוצה $G\in G_\delta$ כך ש־$m^*(G\backslash E)=0$, $E\subseteq G$. כידוע, $G\in G_\delta$ ולכן היא קבוצה מדידה לבג. כמו כן, כל קבוצה ממידה חיצונית 0 היא מדידה לבג, ולכן $G\backslash E$ מדידה לבג. מכאן, שגם ההפרש בינן מדיד לבג[3] ושווה:

$$G\backslash\left(G\backslash E\right) = G\cap\left(G\cap E^C\right)^C = G\cap\left(G^C\cup E\right) = \left(G\cap G^C\right)\cup\left(G\cap E\right) = \emptyset\cup\left(G\cap E\right) = G\cap E = E$$

ולכן E מדידה לבג.

ולכן הוכחנו $(4) \iff (2) \iff (1)$. נוכיח כעת $(1 \implies 5 \implies 3 \implies 1)$.

$(3 \implies 1)$ נניח ש־E מדידה לבג. אזי, גם E^C מדידה לבג, ולכן לפי השקילות שהוכחנו קודם, קיימת קבוצה $E^C\subseteq\mathcal{O}$ כך ש־$m^*(\mathcal{O}\backslash E^C) < \varepsilon$. נגדיר $S=\mathcal{O}^C$. אזי, מתקיים $S\subseteq E^{C^C}=E$, S סגורה ומתקיים:

$$m^*(E\backslash S) = m^*(E\cap S^C) = m^*(E\cap\mathcal{O}) = m^*(\mathcal{O}\cap E) =$$

$$= m^*\left(\mathcal{O}\cap E^{C^C}\right) = m^*(\mathcal{O}\backslash E^C) < \varepsilon$$

ובכך הוכחנו את 3.

$(5 \implies 3)$ לפי ההנחה, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה סגורה S_n כך ש־$S_n\subseteq E$ ו־$m^*(E\backslash S_n) < \frac{1}{n}$. נגדיר $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. קל לראות כי $F\in F_\sigma$, ובגלל שכל S_n מוכל ב־E, אז גם $F\subseteq E$. מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$m^*\left(E\backslash F\right) = m^*\left(E\backslash\bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m\right) \le m^*(E\backslash S_n) < \frac{1}{n}$$

כאשר הצעד השני נובע מכך ש־$E\backslash\bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m \subseteq E\backslash S_n$. זה נכון לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $m^*(E\backslash F)=0$, ולכן **הוכחנו את הטענה.**

$(5 \implies 1)$ נניח שקיימת $F\in F_\sigma$ כך ש־$F\subseteq E$ ו־$m^*(E\backslash F)=0$. אזי, F מדידה לבג כקבוצה הנמצאית ב־F_σ, וכל קבוצה ממידה חיצונית 0 היא מדידה, אז $E\backslash F$ מדידה, ולכן האיחוד שלהן מדיד לבג, ושווה:

$$F\cup E\backslash F = F\cup(E\cap F^C) = (F\cup E)\cap(F\cup F^C) = (F\cup E)\cap\mathbb{R} = F\cup E = E$$

שכן $F\subseteq E$. ולכן הוכחנו כי E מדידה לבג.

סה"כ הוכחנו $4 \iff 2 \iff 1 \iff 3 \iff 5$ ולכן הוכחנו שקילות של כל התנאים, כנדרש. ■

[3] שכן הפרש הוא חיתוך ומשלים סופי בין הקבוצות, וזה כידוע סגור בקבוצות מדידות לבג.

תרגיל 2

1. בתרגול ראינו שאם $I=[a,b]$ קטע סגור וחסום, אזי מרחב הפונקציות הרציפות בו בהחלט $AC([a,b])$ סגור ביחס לכפל בסקלר, חיבור פונקציות וכפל פונקציות.
מה ניתן לומר על המרחב $\mathrm{AC}(I)$ אם I קטע לא חסום? הוכיחו את דבריכם!

2. יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע כלשהו, $f:I\to\mathbb{R}$ ממחלקה $\mathcal{C}^1(I)$ (גזירה ברציפות בקטע). האם $f\in\mathrm{AC}(I)$?

3. הוכיחו ע"י **שלילת ההגדרה** (ורק ע"י שלילת ההגדרה!) כי פונקציית קנטור אינה רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$.

הוכחה. נענה על הסעיפים בהתאמה,

1. בקלות ניתן לומר ש-$\mathrm{AC}(I)$ סגור ביחס לכפל בסקלר וחיבור פונקציות, וזאת כי ההוכחה עבור קטע חסום סגור אינה משתנה גם עבור קטע לא חסום, שכן בפועל לא היה צורך בכך. לעומת זאת, בהוכחת סגירות לכפל של פונקציות כן היינו צריכים הנחה זו. לכן, נוכיח כי $\mathrm{AC}(I)$ לא בהכרח סגור לכפל פונקציות.
נגדיר $f(x)=x$ בקטע $[0,\infty)$. קל לראות ש-f רציפה בהחלט, שכן עבור $\varepsilon>0$ נתון, אפשר לבחור $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ולקבל אם $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ אוסף של קטעים זרים בזוגות שסכום אורכם קטן מ-δ אז:

$$\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|=\sum_{k=1}^n|b_k-a_k|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

ובכך f רציפה בהחלט ב-$[0,\infty)$. לעומת זאת, נוכיח כי $g(x)=x^2=f(x)\cdot f(x)$ אינה רציפה בהחלט ב-$[0,\infty)$. מספיק שנראה כי היא אינה רציפה במידה שווה[4]. לשם כך, נראה שלכל $\delta>0$ קיימים $x_1,x_2\in[0,\infty)$ כך שאם $|x_1-x_2|<\delta$ אז $|f(x_1)-f(x_2)|\geq 1$. נבחר n מספיק גדול כך ש-$n\delta\geq 1$. נבחר $x_1=n+\frac{\delta}{2},x_2=n$. נקבל כי $|x_1-x_2|<\delta$ ו-

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\left(n+\frac{\delta}{2}\right)^2-n^2\right|=\left|n^2+n\delta+\frac{\delta^2}{4}-n^2\right|=n\delta+\frac{\delta^2}{4}\geq n\delta\geq 1$$

ובזאת הוכחנו כי f^2 אינה רציפה במ"ש, ולכן בהכרח אינה רציפה בהחלט, ובכך הוכחנו ש-$\mathrm{AC}(I)$ לא בהכרח סגור לכפל פונקציות כש-I אינו קטע חסום.

2. לא בהכרח. ניקח $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$. היא אכן רציפה בקטע זה, ונגזרתה היא $-\frac{1}{x^2}$ שגם היא רציפה בקטע $(0,1)$, ולכן $f\in\mathcal{C}^1(I)$. אך f היא אינה רציפה בהחלט, ומספיק שנראה שהיא אינה רציפה במ"ש. עבור $\varepsilon=1$, לכל $\delta>0$ נמצא x_1,x_2 כך ש-$|x_1-x_2|<\delta$ אך $|f(x_1)-f(x_2)|\geq 1$.
נבחר $\ell<\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\delta}{2}\right\}$. עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו נסמן $x_1=\frac{1}{n},x_2=\frac{1}{n}+\ell$. מתקיים ו-$|x_1-x_2|=\ell=\delta/2<\delta$.
מתקיים:

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|n-\frac{1}{\frac{1}{n}+\ell}\right|=\left|\frac{1+n\ell}{\frac{1}{n}+\ell}-\frac{1}{\frac{1}{n}+\ell}\right|=\left|\frac{n\ell}{\frac{1}{n}+\ell}\right|=\frac{1}{\frac{\frac{1}{n}+\ell}{n\ell}}=\frac{1}{\frac{1}{n^2\ell}+\frac{1}{n}}$$

והערך המוחלט יורד כי כל הביטוי חיובי. נבחר את n להיות גדול מספיק כדי שהביטוי הנ"ל יהיה גדול מ-1, וזה אפשרי שכן הביטוי שואף ל-∞ כאשר $n\to\infty$, וגם כן שיהיה גדול מספיק כדי ש-$\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$. מכאן נקבל כי $x_1,x_2\in(0,1)$, $|x_1-x_2|<\delta$ אך $|f(x_1)-f(x_2)|\geq 1$. מכאן שהוכחנו את השלילה של רציפות במ"ש, ולכן f אינה רציפה במ"ש ולכן אינה רציפה בהחלט.

[4] שכן רציפות בהחלט גוררת רציפות במידה שווה.

3. נסמן את פונקציית קנטור ב־f. נראה שלכל $\delta > 0$ קיים אוסף קטעים $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ זרים כך שסכום אורכם קטן δ אז

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \geq \frac{1}{2}$$

כידוע, $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ כאשר C_n הוא איחוד זר של קטעים סגורים. כידוע, $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \ldots$ סדרה יורדת של קבוצות. ולכן,

$$\lim_{n\to\infty} m\left(C_n\right) = m(\mathcal{C}) = 0$$

וזו סדרה חיובית. ולכן, בהכרח קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $m(C_n) < \delta$. מידת C_n היא סכום מידת הקטעים הסגורים הזרים המרכיבים את C_n. כידוע, C_n מורכב מאיחוד של m קטעים זרים $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{m}$ כאשר בלי הגבלת הכלליות נניח $b_k \leq a_{k+1}$[5], ולכן סכום אורכי הקטעים הנ"ל קטן ממש מ־δ. ניקח את האוסף שלנו להיות $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{m}$. כעת, חשוב לשים לב כי בכל נקודה ש**לא נמצאת בקטעים אלה**, פונקציית קנטור קבועה. כלומר, אם $b_{k-1} \leq x \leq a_k$ אז $f(b_{k-1}) = f(x) = f(a_k)$. נוכיח כי

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| = 1$$

כעת, f פונקציית קנטור היא פונקצייה מונוטונית עולה, ולכן הערך מוחלט אינו משנה. ולכן, סכום הטור הנ"ל הוא למעשה:

$$f(b_m) - f(a_m) + f(b_{m-1}) - f(a_{m-1}) \cdots + f(b_1) - f(a_1)$$

אך לפי מה שאמרנו לעיל, זה טור טלסקופי והוא מצטמצם ל־

$$f(b_m) - f(a_1)$$

אך לפי הבנייה, הקטע האחרון ב־C_n מכיל את 1, והקטע הראשון מכיל את 0, ו־b_m, a_1 הם נקודות הקצה של קטעים אלה, ולכן זה שווה ל־

$$f(1) - f(0) = 1$$

ולכן סה"כ

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

ולכן הוכחנו את שלילת ההגדרה, כדרוש.

■

[5] כלומר, זה פשוט כל הקטעים ב־C_n לפי הסדר שלהם בתוך הקטע $[0, 1]$.

תרגיל 3 כזכור, אם f פונקציה ממשית ומוגדרת בסביבת הנקודה x, הנגזרת הסימטרית שלה שם מוגדרת ע"י

$$f'_{sym}(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

1. הוכיחו כי אם f גזירה בנקודה כלשהי $x\in\mathbb{R}$ אזי הנגדרת הסימטרית קיימת בנקודה זו, ומתקיים $f'_{sym}(x)=f'(x)$.
2. תנו דוגמא למצב שבו f לא גזירה בנקודה כלשהי x - ובכל זאת קיימת $f'_{sym}(x)$.

הוכחה. נענה על הסעיפים בהתאמה,

1. נניח ש־f גזירה בנקודה $x\in\mathbb{R}$. אזי,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ולכן, זה נכון גם עבור $h\to 0^+, 0^-$ שכן התכנסות מובטחת $\iff$ יש התכנסות דו־צדדית. ולכן,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

וגם כן:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

כאשר בשיוויון השני, כאשר $h\to 0^-$, זה שווה לגבול כאשר $-h\to 0^+$, ולכן החלפנו ל־$h\to 0^+$ אך דאגנו להחליף סימן. כעת, אך נציב את הידוע לנו ונקבל:

$$2f'(x) = f'(x)+f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

נחלק בשני האגפים ב־2 לקבל:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'_{sym}(x)$$

וקיבלנו את הדרוש.

2. נגדיר $f(x)=|x|$. ניקח $x_0=0$. כידוע, פונקציית הערך המוחלט אינה גזירה בנקודה 0. אך מתקיים כי:

$$f'_{sym}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|h|}{2h} = 0$$

ולכן הנגזרת הסימטרית קיימת ושווה 0 בנקודה $x_0=0$ למרות ש־f אינה גזירה שם.

■

תרגיל 4 ענו על הסעיפים הבאים,

1. יהי $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ קטע סגור וחסום, ותהי $f:[a,b]\to(0,\infty)$ פונקציה רציפה בהחלט וחיובית ממש. הוכיחו כי $\frac{1}{f}\in\mathrm{AC}([a,b])$.

2. האם סעיף 1 נשאר נכון אם מדובר בקטע פתוח?

הוכחה. נענה על הסעיפים בהתאמה:

1. תהי $f:[a,b]\to(0,\infty)$ רציפה בהחלט וחיובית ממש. נוכיח כי $\frac{1}{f}$ רציפה בהחלט. לשם כך, יהי $\varepsilon>0$. לפי משפט ויירשטראס השני, לא רק ש־f חסומה, אלא היא מקבלת את ערך המינימום והמקסימום שלה. נסמן את ערך המינימום ב־m, אז בהכרח $m>0$[6]. לכן, קיים $\delta>0$ כך שאם $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ אוסף של קטעים זרים בזוגות שסכום אורכם קטן מ־δ, אז:

$$\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<m^2\varepsilon$$

עבור אותו δ, נקבל שאם $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ אוסף של קטעים זרים בזוגות שסכום אורכם קטן מ־δ, אז:

$$\sum_{k=1}^n\left|\frac{1}{f(b_k)}-\frac{1}{f(a_k)}\right|=\sum_{k=1}^n\left|\frac{f(a_k)-f(b_k)}{f(a_k)f(b_k)}\right|\le\sum_{k=1}^n\left|\frac{f(a_k)-f(b_k)}{m^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{1}{m^2}m^2\varepsilon=\varepsilon$$

כאשר אי־השוויון בצעד השני נובע מכך שלכל $x\in[a,b]$, $m\le f(x)$ ולכן $\frac{1}{m}\ge\frac{1}{f(x)}$ ולכן $\frac{1}{m^2}\ge\frac{1}{f(x)g(x)}$. ולכן $\frac{1}{f}$ רציפה בהחלט, כדרוש.

2. ניקח $I=(0,1)$, $f(x)=x$. הוכחנו כבר בשאלה 2 ש־f רציפה בהחלט ב־$[0,\infty)$, ואותה הוכחה חלה כאן. לעומת זאת, $g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}$ אינה רציפה בהחלט ב־$(0,1)$, ואת זאת הוכחנו באותה שאלה בסעיף השני. ולכן סעיף (1) אינו נכון כאשר I קטע פתוח.

■

[6] שכן הפונקציה חיובית ממש, ומקבלת בנקודה מסוימת את הערך m.