# תרגיל 4

2 באפריל 2020

1. תהי $A = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עבור $p \notin \mathbb{R}$ , עם הטופולוגיה הבאה: $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{B \subseteq A : |B^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.
פתרון:

נבדוק את 3 התכונות:

1. $\emptyset \in P(\mathbb{R})$ ולכן $\emptyset \in \tau$ . בנוסף, $|A^c| \leq \aleph_0$ ולכן $A \in \tau$ .
2. איחודים כלשהם: יהיו $O_i \in \tau$ . אם כולן תת קבוצות של $\mathbb{R}$, אז כך גם האיחוד, ולכן הוא שייך ל$\tau$ . אחרת, יש $i$ כך ש$|O_i^c| \leq \aleph_0$. אז מתקיים: $(\bigcup O_i)^c \subseteq O_i^c$ , ולכן הוא בן מניה. מכאן ש$\bigcup O_i \in \tau$ .
3. חיתוכים סופיים: יהיו $O_1, ..., O_n \in \tau$ . אם אחד מהם מוכל ב$\mathbb{R}$, אז כך גם החיתוך. אחרת, לכולם יש משלים בן מניה, ואז $|(O_1 \cap ... \cap O_n)^c| = |O_1^c \cup ... \cup O_n^c| \leq |O_1^c| + ... + |O_n^c| \leq \aleph_0$

2. (א) תהי $X$ קבוצה עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי $X$ סופית.
בטופולוגיה הקו־סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם $A$ סגוחה אז $A$ סגורה וגם $A^c$ סגורה. כלומר $A$ סופית וגם $A^c$ סופית. ולכן $X = A \cup A^c$ גם סופית.

(ב) יהי $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא $X$. האם $(X, \tau)$ היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)
לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית $X$ ואת $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ כאשר $a \in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמא עם אינסוף קבוצות פתוחות. ניקח $X = \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. כלומר $A_n = \mathbb{N} \cap (0, n]$. ברור שכל $A_n$ היא קבוצה סופית. קל לוודא ש $\tau = \{A_n\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

3. נציג הוכחה טופולוגית לקיומם של אינסוף ראשוניים.
יהי $a$ שלם ו־$d$ טבעי. נגדיר $S_{a,d} = a + d\mathbb{Z} = \{a + dm \mid m \in \mathbb{Z}\}$. נגדיר טופולוגיה $\tau$ על השלמים באופן הבא: קבוצה $O$ היא פתוחה אם ורק אם $O$ היא איחוד של קבוצות מהצורה $S_{a,d}$.

(א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z}, \tau)$ הוא מרחב טופולוגי. (ההוכחה בתרגול)

(ב) הסבירו מדוע לכל $a$ ו־$d$, הקבוצה $S_{a,d}$ פתוחה. פתרון: זהו איחוד של קבוצה אחת.

(ג) הוכיחו שלכל $a$ ו־$d$, הקבוצה $S_{a,d}$ סגורה. פתרון: מתקיים $S_{a,d} = \bigcup_{i=1}^{d-1} S_{a+i,d}$

(ד) נסמן $A = \bigcup_p S_{0,p}$ כאשר $p$ ראשוני. הראו כי $A^c = \{1, -1\}$. פתרון: לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה כל מספר שלם $m$ מתפרק למכפלה של גורמים ראשוניים עד כדי סימן. אם המכפלה ריקה, קיבלנו $1$ או $-1$. אחרת קיים ראשוני $p$ המחלק את $m$, כלומר $m = kp$ ולכן $m \in S_{0,p}$, ובפרט נמצא באיחוד.

(ה) הניחו בשלילה שמספר הראשוניים סופי. האמנם $A^c$ יכולה להיות קבוצה פתוחה? פתרון: נניח בשלילה שיש מספר סופי של ראשוניים. אז $A$ היא איחוד סופי של קבוצות סגורות, ולכן סגורה. אז $A^c$ פתוחה. אבל כל קבוצה פתוחה בטופולוגיה $\tau$ היא ריקה או אינסופית, בסתירה.

הערה: את ההוכחה הנ"ל גילה בצעירותו פרופ' הלל פורסטנברג מהאוניברסיטה העברית, שזכה לאחרונה בפרס אבל.