אינפי 1 – מתמטיקה – פתרון תרגיל 6

1. א. מיצאו את $\frac{dy}{dx}$ עבור $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (זוהי משוואת מעגל שרדיוסו r ומרכזו (a,b)).

$2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$ לכן $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$.

ב. הסיקו כי המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה (הדרכה: מיצאו את שיפוע הרדיוס, כלומר הישר המחבר את נקודת המרכז לנקודה (x,y) על המעגל, והראו כי הוא הפכי ונגדי לשיפוע המשיק שמצאתם בסעיף א'.)

שיפוע הישר העובר דרך הנקודות (a,b) ו- (x,y) הוא: $m_r=\frac{y-b}{x-a}$.

ראינו בסעיף הקודם כי שיפוע המשיק למעגל בנקודה (x,y) הוא $m_t=-\frac{x-a}{y-b}$.

מתקיים: $m_r\cdot m_t=-1$ לכן אכן הם מאונכים.

2. מיצאו את $\frac{dy}{dx}$ עבור:

א. $e^{\sin x}=\cos(x^2-1)\,y$.

$$e^{\sin x}\cos x=-\sin(x^2-1)2x\,y+\cos(x^2-1)\frac{dy}{dx}$$

לכן $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sin x}\cos x+\sin(x^2-1)2xy}{\cos(x^2-1)}$.

ב. $\sin(\cos(\sin x))=\cos(\sin(\cos y))$.

לכן: $\cos(\cos(\sin x))(-\sin(\sin x))\cos x=-\sin(\sin(\cos y))\cos(\cos y)(-\sin y)\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos(\cos(\sin x))\sin(\sin x)\cos x}{\sin(\sin(\cos y))\cos(\cos y)\sin y}.$$

ג. $e^{e^y}(x^2+1)^{x^2+1}=0$

נסמן $u=e^{e^y}$, $v=(x^2+1)^{x^2+1}$. מתקיים:

$\frac{du}{dx}=e^{e^y}e^y\frac{dy}{dx}$,

$\frac{dv}{dx}=((x^2+1)^{x^2+1})'=(e^{(x^2+1)\ln(x^2+1)})'=(x^2+1)^{(x^2+1)}(2x\ln(x^2+1)+2x)$.

לכן כעת נוכל לבצע גזירה סתומה על המשוואה המקורית:

$e^{e^y}e^y\frac{dy}{dx}(x^2+1)^{x^2+1}+e^{e^y}(x^2+1)^{x^2+1}2x(1+\ln(x^2+1))$ ולאחר בידוד $\frac{dy}{dx}$ וצמצום נקבל:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x(1+\ln(x^2+1))}{e^y}.$$

3. באיזה נקודות הפונקציות הבאות גזירות?

א. $f(x)=\begin{cases} 2x+\sin x & x\le 5 \\ \cos x-12 & x>5 \end{cases}$

בנקודה $x=5$ הפונקציה לא גזירה כי עבור $0<\Delta x\approx 0$ נקבל כי $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(5+\Delta x)-12-(10+\sin 5)}{\Delta x}$ אינסופי לכן אין לו חלק סטנדרטי. (הסבר: המונה משמעותי כי $-1\le\cos(5+\Delta x)\le 1$, וכן $-1\le\sin 5\le 1$, לכן המונה הוא בין -24 ל- -20 , כלומר משמעותי. המכנה אינפי', לכן משמעותי חלקי אינפי' הוא אינסופי).
בכל נקודה אחרת הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. לכן לסיכום: f גזירה לכל $x\ne 5$.

ב. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le -3 \\ x^3+37 & x>-3 \end{cases}$

נבדוק גזירות בנקודה $x=-3$:
עבור $0<\Delta x\approx 0$ נקבל:
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(-3+\Delta x)^3+37-(3^2+1)}{\Delta x}=\frac{-27+27\Delta x-9\Delta x^2+\Delta x^3+37-10}{\Delta x}=27-9\Delta x+\Delta x^2$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=27$.
עבור $0>\Delta x\approx 0$ נקבל:
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(-3+\Delta x)^2+1-(3^2+1)}{\Delta x}=\frac{9-6\Delta x+\Delta x^2+1-10}{\Delta x}=-6+\Delta x$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=-6$.
קיבלנו שתי תוצאות שונות עבור שני ערכי Δx שונים לכן הפונקציה לא גזירה בנקודה $x=-3$.
מצד שני הפונקציה גזירה בכל נקודה אחרת לפי כללי הגזירה שלמדנו.
לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x\ne -3$.

ג. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ (x+1)^2 & x\ge 0 \end{cases}$

לכל $x\ne 0$ הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. נשאר לבדוק מה קורה בנקודה $x=0$:
עבור $0<\Delta x\approx 0$:
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x+1)^2-(0+1)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x^2+2\Delta x}{\Delta x}=2+\Delta x$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=2$.
ועבור $0>\Delta x\approx 0$:
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+1-(0+1)^2}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=2$.
כלומר קיבלנו ש- $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=2$ לכל $0\ne\Delta x\approx 0$, לכן הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$ (ונגזרתה 2).
לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$.

4. מיצאו **<u>לפי הגדרה</u>** (כלומר הציבו $x=x_0+\Delta x$) את הגבולות של הפונקציות הבאות $f(x)$ בנקודה $x=a$:

א. $f(x)=x^2+2x-1$, $a=3$

$$st((3+\Delta x)^2+2(3+\Delta x)-1)=(3+0)^2+2(3+0)-1=14$$

ב. $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$, $a=2$

$st(\frac{(2+\Delta x)^3-1}{2+\Delta x-1})=\frac{(2+0)^3-1}{2+0-1}=7$.

ג. $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$, $a=1$

$st(\frac{(1+\Delta x)^3-1}{1+\Delta x-1})=st(\frac{1+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3-1}{\Delta x})=st(3+3\Delta x+\Delta x^2)=3$.

5. א. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים וכן כי $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים. מה ניתן לאמר על קיום או אי-קיום $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$?

לא ניתן להסיק כלום. נראה שתי דוגמאות, באחת מהן הגבול לא קיים ובשניה הגבול קיים:

- תהיינה $f(x)=g(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$. לא קיימים הגבולות בנקודה $x=0$, וכן לפונקציה $f(x)+g(x)$ לא קיים הגבול בנקודה $x=0$ כי: $f(x)+g(x)=\begin{cases}-2 & x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$.
- תהי $f(x)=g(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$, ותהי $g(x)=-f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ -1 & x\geq 0\end{cases}$. שוב הגבולות לא קיימים בנקודה $x=0$, אך הפעם $f+g$ שווה זהותית לאפס (כלומר זוהי פונקציית האפס), לכן הגבול שלה קיים ב-0.

ב. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וכי $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים. מה ניתן לאמר על קיום או אי-קיום $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$?

בהכרח ניתן להסיק כי הגבול לא קיים: אכן, נניח בשלילה כי $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ לא קיים. מתקיים:
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))-\lim_{x\to x_0} f(x)$ ולפי משפט אריתמטיקה של גבולות, כיוון ששני הגבולות בצד ימין קיימים, גם הגבול בצד שמאל קיים, בסתירה לנתון. מש"ל.