לינארית־תרגיל

1. תזכורת: נאמר ששתי מטריצות A, B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A = PBP^{-1}$.

א. הוכח: למטריצות דומות יש את אותו $trace$.

ב. הוכח: למטריצות דומות יש את אותה דטרמיננטה.

פתרון:

א. נזכר שלכל C, D מטריצות, $tr(CD) = tr(DC)$.

ובכן, $tr(A) = tr(PBP^{-1}) = tr(P^{-1}PB) = tr(B)$.

ב. $|A| = |PBP^{-1}| = |P||B||P^{-1}| = |P||B||P|^{-1} = |P||P|^{-1}|B| = |B|$.

2. תהי $V = \{v_1, ..., v_n\}$ קבוצה אורתונורמלית של וקטורים ב$\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית,, וQ מטריצה אורתוגונלית. הוכח $\{Qv_1, ..., Qv_n\}$ גם קבוצה אורתונורמלית.

פתרון:

תזכורת: מטריצה אורתוגונלית Q מקיימת $Q^tQ = I$.

ראשית נראה שלכל $v_i \in V$ $||Qv_i|| = 1$.

ובכן, $||Qv_i|| = \sqrt{\langle Qv_i, Qv_i\rangle} = \sqrt{(Qv_i)^t(Qv_i)} = \sqrt{v_i^tQ^tQv_i} = \sqrt{v_i^tv_i} = 1$.

כעת, נראה שלכל i, j $\langle Qv_i, Qv_j\rangle = 0$.

ובכן, $\langle Qv_i, Qv_j\rangle = (Qv_i)^t(Qv_j) = v_i^tQ^tQv_j = v_i^tv_j = o$.

3. תהי V קבוצה אורתוגנלית כך ש $0 \notin V$, הוכיחו שV בת"ל.

פתרון:

תהי $V=\{v_{1,...,}v_n\}$ קבוצה אורתוגונלית שלא מכילה את וקטור האפס. נניח בשלילה שהקבוצה ת"ל. כלומר, קיים צ"ל מתאפס: $\sum\alpha_i v_i=0$, כך שלפחות אחד המקדמים שונה מ0. ננחי שזה α_j.

$\langle v_j,\sum\alpha_i v_i\rangle=\langle v_j,0\rangle=0$.

מצד שני, $\langle v_j,\sum\alpha_i v_i\rangle=\sum\alpha_i\langle v_j,v_i\rangle=\alpha_j\langle v_j,v_j\rangle$.

הסבר: לכל $i\neq j$ $\langle v_j,v_i\rangle=0$, כי הקבוצה אורתונורמלית.

לכן נשארנו רק עם $\alpha_j\langle v_j,v_j\rangle$. אבל $v_j\neq 0$ כי נתון ש0 לא שייך לקבוצה, ולכן $\langle v_j,v_j\rangle\neq 0$. כמו כן, הנחנו ש $\alpha_j\neq 0$. לכן $\alpha_j\langle v_j,v_j\rangle\neq 0$. סתירה.

4. א.יהיו A,B מטריצות ריבועיות מאותו גודל. הוכיחו: לAB וBA יש אותם ע"ע.
(הפרידו למקרים של $\lambda=0$ ו $\lambda\neq 0$).

ב. הוכיחו: לA ולA^t יש אותם ע"ע. (רמז: השתמשו בדטרמיננטה.)
האם לA ול A^t יש אותם וקטורים עצמיים?

פתרון:

א. נוכיח שכל ע"ע של AB הוא גם ע"ע של BA. ההוכחה בכיוון השני זהה.

יהי λ ע"ע של AB. כלומר, קיים $v\neq 0$ כך ש $ABv=\lambda V$. לכן $BABV=B\lambda v=\lambda Bv$. אם $Bv\neq 0$ אז Bv הוא ו"ע של BA עם ע"ע λ. בפרק, λ ע"ע של BA.

אם $Bv=0$ אז $ABv=0$, לכן $\lambda=0$.

אם לAB יש ע"ע 0 זה אומר שהמטריצה לא הפיכה, כלומר, בהכרח A או B לא הפיכות, ולכן גם BA לא הפיכה$\Longleftarrow$לBA יש ע"ע 0.

ב. נוכיח שלA ולA^t יש את אותו פ"א.

$P_A=|\lambda I-A|=|(\lambda I-A)^t|=|(\lambda I)^t-A^t|=|\lambda I-A^t|=P_{A^t}$.

הסתמכנו במעברים על כך שלכל מטריצה B, $|B|=|B^t|$, וכן ש $(B+C)^t=B^t+C^t$.

כידוע, הע"ע הם השורשים של הפ"א, ולכן לA וA^t יש אותם ע"ע.

אין להם בהכרח את אותם ו"ע. לדוגמא: נקח את $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. הע"ע היחיד שלו הוא 0, והוקטורים הע"ע שלו הם $\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$.

לעומת זאת, $A^t=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. הו"ע שלו הם $\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}$.

5.א. הוכיחו: אם λ ע"ע של A, אז λ^k ע"ע של A^k.

ב. תזכורת: מטריצה A נקראת נלפוטנטית אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $A^k = 0$. הוכיחו: הע"ע היחיד של מטריצה נלפוטנטית הוא 0.

פתרון:

א. נוכיח באינדוקציה על k.

נראה שאם λ ע"ע של A עם ו"ע v, אז λ^k ע"ע של A^k עם אותו ו"ע.

עבור $k = 1$, נתון ש $Av = \lambda v$.

נניח נכונות לk. נסתכל על $k + 1$:

$A^{k+1}v = AA^kv = A\lambda^kv = \lambda^kAv = \lambda^k\lambda v = \lambda^{k+1}v$.

ב. תזכורת: עבור מטריצת האפס הע"ע היחיד הוא 0, כי אם $A = 0$ אז $Av = 0$.

כעת, תהי A מטריצה נלפוטנטית.

ראשית, נראה ש0 הוא אכן ו"ע של A.

נשים לב ש A לא הפיכה.

הסבר: אם $A = 0$, ברור.

אחרת, יהי k המינימלי כך ש $A^k = 0$. $k > 1$. $A^{k-1} \neq 0$.

$AA^{k-1} = A^k = 0 \Longrightarrow A^{k-1} = 0$, כי A הפיכה. סתירה.

ידוע שלמטריצה לא הפיכה קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש $Av = 0$, כלומר v ו"ע עם ע"ע 0 . לכן, 0 ע"ע של המטריצה.

כעת, נוכיח שאם λ ע"ע של A אז בהכרח $\lambda = 0$.

כמו שראינו, לכל ע"ע λ של A, λ^k הוא ע"ע של A^k. אבל $A^k = 0$ לכן הע"ע היחיד שלה הוא 0. כלומר, $\lambda^k = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$.

6. תהי $A \in F^{n\times n}$ כך שסכום האיברים בכל שורה של A קבוע. (כלומר, קיים k כך ש: $\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$) הוכיחו ש $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע של A.

פתרון: נוכיח ש $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי עבור הע"ע k.

נסמן $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

ובכן, $v = Au = A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ כך ש $v_i = (R_i(A))^t v$.

כלומר, $k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = v_i$

לכן $k\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\ \vdots\\ k\end{pmatrix} = Au = A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. מש"ל.