אינפי 1 – תרגיל 8

1. הגדרות גבול של פונקציות:

<u>קושי</u>: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים ש $|f(x)-l|<\varepsilon$

<u>היינה</u>: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\forall n: x_n\neq x_0$ וגם $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ (שימו לב זה גבול של סדרה, לא של פונקציה) מתקיים שהסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ (שוב, זה גבול של סדרה ולא גבול של פונקציה).

a. הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי היינה אז $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי קושי (תניחו בשלילה שזה לא גבול לפי קושי, ומצאו לכן סדרה שסותרת את תנאי היינה)

b. הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי קושי אז $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי היינה

2. הוכח לפי הגדרת קושי ש $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-x-6}{x-8}=-36$

3. מצא, והוכח לפי הגדרת היינה את הגבול $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4. מצא, והוכח לפי הגדרת קושי את הגבול $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

5. הוכח לפי הגדרת קושי ש $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$

6. תהי f מוגדרת וחסומה בקטע $[0,1]$. הוכח/הפרך: קיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ כך שקיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$

7. נסח את שלילת הגבול לפי קושי

8. תהי f המוגדרת על ידי $f=\begin{cases}1-x & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. האם קיימת נקודה a כך שקיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$? הוכח.

9. תהי f כך שקיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לכל $x_0\in\mathbb{R}$. הוכח/הפרך: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x_0 ולכל x המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $\left|f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)\right|<\varepsilon$. במילים אחרות, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ שמתאים ללא תלות ב x_0. [רמז: $f=x^2$]