1. מהחוברת של ד"ר בועז צבאן, עמוד 35 והלאה: 4.1; 4.3; 4.6 סעיף א' (הניחו $F=\mathbb{R}$ והתעלמו מהמאפיין)

4.1:

א. הוכחה:

נוכיח שתתי המרחב מוכלים בסכום: $0\in w, u\in U \Rightarrow u=u+0\in U+W \Rightarrow U\subseteq U+W$, וההוכחה דומה עבור W. נותר להוכיח שהסכום הינו תת מרחב, מספיק להוכיח שכל צ"ל נשאר בו - $\alpha(u_1+w_1)+\beta(u_2+w_2)=(\alpha u_1+\beta u_2)+(\alpha w_1+\beta w_2)\in U+W$

ב. הוכחה:

נניח $u+w\in U+W$ כך ש $u\in U, w\in W$. $U,W\subseteq Y$ ולכן $u,w\in Y$ ומתוך סגירות $u+w\in Y$ ולכן $U+W\subseteq Y$

(שימו לב, ההוכחה של תרגיל זה קלה, עיקרו הוא ההבנה שהסכום הינו תת המרחב הקטן ביותר המכיל את שני תתי המרחבים W,U).

4.3:

א. הפרכה: $U=span\{(0,1)\}, W=span\{(1,0)\}, V=span\{(1,1)\}$

ב. הפרכה: $U=W=V=\{0\}$

ג. הפרכה: $U=span\{(0,1)\}, W=span\{(1,0)\}, V=span\{(1,1)\}$

4.6א':

הוכחה: נניח $A\in U\cap W$. לכן לכל $i,j$ מתקיים $a_{ij}=a_{ji}$ וגם $a_{ij}=-a_{ji}$ ביחד נובע $2a_{ij}=0$ ולכן (בשדה ממאפיין שונה מ2) $a_{ij}=0$. כלומר המטריצה היחידה בחיתוך הינה מטריצה שכל איבריה אפסים, ולכן $U\cap W=\{0\}$.

נותר להוכיח ש $U+W=V$, מספיק להוכיח שכל מטריצה הינה סכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית. תהי מטריצה $A$ כלשהי, איבריה מסומנים $a_{ij}$. רוצים $A=B+C$ כאשר $B=B^t$ ו $C=-C^t$. לכן $A^t=\left(B+C\right)^t=B^t+C^t=B-C$. ביחד יוצא ש $B=\frac{A^t+A}{2}, C=\frac{A^t-A}{2}$ וקל לראות שאכן קיבלנו את הדרוש.

2. מהחוברת של ד"ר בועז צבאן, עמוד 45 והלאה: $8.2\frac{1}{2}$; 8.3; 8.5;

$8.2\frac{1}{2}$:

א. הפרכה: ניתן לקחת $V \subseteq W$ ואז יתקיים $\dim(V \cap W) = \dim W = 8$

ב. הפרכה: ניתן בקלות לקחת מרחבים עם חיתוך אפס, ואז מימד החיתוך יהיה אפס

ג. הפרכה: ניקח $U = W$ כך שהמימד שלהם הוא חצי מהמימד של המרחב כולו

ד. הוכחה: $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ לפי משפט המימדים. ברור ש $V_1 \subseteq V_1 + V_2 \subseteq V$ ולכן $\dim V_1 \le \dim(V_1 + V_2) \le \dim V$. ביחד יוצא ש $2 = 9 - 7 \le \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) \le 9 - 5 = 4$

8.3:

פתרון: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ ולכן כמו בסעיף אחרון של התרגיל הקודם, נובע ש $3 = 4 - 7 \ge \dim(U \cap W) \ge 5 - 7 = 2$. על מנת להוכיח שאפשרויות אלה אכן קיימות, ניתן דוגמאות לתתי מרחבים כאלה עבור מרחב כללי. כלשהו. יהי $\{v_1, \ldots, v_5\}$ בסיס ל $V$. אזי $U = span\{v_1, v_2, v_3\}, W = span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ מקיימים שהחיתוך הוא ממימד 3, ו $span\{v_1, v_2, v_3\}, span\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ מקיימים שהחיתוך הוא ממימד 2.

8.5:

הוכחה: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ ברור ש $\dim(U \cap W) \le \dim W$, נניח בשלילה שהם שווים, אזי $U \cap W = W$ ולכן $W \subseteq U$ סתירה. לכן $\dim(U \cap W) < \dim W$. וביחד יוצא ש $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) > n - 1 + \dim W - \dim W = n - 1$ ולכן $\dim(U + W) = n$ ולכן $U + W = V$.

3. מהחוברת של ד"ר בועז צבאן, עמוד 57 והלאה: 2.15 סעיף ב'; 2.16; 2.23; 2.24;

2.15 ב':

פתרון: $\ker(T_A)=\{X \mid T_AX=0\}$, נסמן $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ אזי

$$0=AX-XA=\begin{pmatrix} x+2y-x & y+2w-2x-3y \\ 3y-z & 3w-2z-3w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y & 2w-2x-2y \\ 3y-z & 2z \end{pmatrix}$$

לכן עלינו לפתור את מערכת המשוואות $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$ על מנת לקבל

$\ker(T_A)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$\mathrm{Im}(T_A)=\{T_AX\}=AX-XA=\begin{pmatrix} 2y & 2w-2x-2y \\ 3y-z & 2z \end{pmatrix}=$$

$$=x\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

קל לראות שמימד הגרעין הינו אחד, מימד התמונה הינו שלוש, וביחד הם שווים לארבע – מימד מרחב המטריצות מגודל שתיים על שתיים.

2.16:

א. הוכחה: לפי הגדרה, $T$ על אם"ם $\mathrm{Im}\,T=W$. לפי משפט הדרגה, $\dim\mathrm{Im}\,T+\dim\ker T=\dim V$, ולכן $\dim\mathrm{Im}\,T=\dim V-\dim\ker T\le\dim V<\dim W$ ולכן לא ייתכן ש $\mathrm{Im}\,T=W$ ולכן ההעתקה אינה על.

ב. הוכחה: לפי משפט, $T$ חח"ע אם"ם $\ker T=\{0\}$. כמו כן, $\mathrm{Im}\,T\subseteq W$ ולכן $\dim\mathrm{Im}\,T\le\dim W$ לפי משפט הדרגה $\dim\ker T=\dim V-\dim\mathrm{Im}\,T\ge\dim V-\dim W>0$ ולכן $\ker T\ne 0$ ולכן ההעתקה אינה חח"ע.

ג. הוכחה: נניח $T$ חח"ע, לכן $\ker T=\{0\}$ ולכן לפי משפט הדרגה $\dim\mathrm{Im}\,T=\dim V-\dim\ker T=\dim V=\dim W$ ולכן $\mathrm{Im}\,T=W$ ולכן ההעתקה על.

מכיוון שני, נניח שההעתקה על, לכן $\mathrm{Im}\,T=W$ ולכן $\dim\mathrm{Im}\,T=\dim W=\dim V$ ולכן $\dim\ker T=\dim V-\dim\mathrm{Im}\,T=0$ ולכן $\ker T=\{0\}$ ולכן ההעתקה חח"ע.

:2.23

הוכחה:

א. נוכיח $span(v)\cap\ker(\varphi)=\{0\}$. נניח $u\in span(v)$ לכן $u$ הוא מהצורה $u=\alpha v$ ולכן $\varphi(\alpha v)=\alpha\varphi(v)$. נניח גם $u\in\ker(\varphi)$ אזי $0=\varphi(u)=\varphi(\alpha v)=\alpha\varphi(v)$, מכיוון שנתון $\varphi(v)\neq 0$ נובע ש $\alpha=0$ ולכן $u=0$ בהכרח, כפי שרצינו.

ב. מכיוון ש $0\neq\varphi(v)\in\operatorname{Im}\varphi$ מתקיים ש $\dim\operatorname{Im}\varphi\geq 1$, מכיוון ש $\operatorname{Im}\varphi\subseteq F$ והשדה הוא מרחב וקטורי ממימד אחד מעל עצמו, מתקיים ש $\dim\operatorname{Im}\varphi=1$. לכן לפי משפט הדרגה מתקיים $\dim\ker T=\dim V-1$

ג. לפי משפט המימדים

$$\dim\left(span(v)+\ker\varphi\right)=\dim span(v)+\dim\ker\varphi-\dim\left(span(v)\cap\ker\varphi\right)=$$

$$=1+\dim V-1-0=\dim V.$$

לכן מתקיים $span(v)+\ker\varphi=V$ וביחד עם א' סיימנו.

:2.24

הפרכה:

$V=W=R^2$, $B=\{(1,0),(0,1)\}$, $T(1,0)=T(0,1)=(1,1)\neq 0$, לכן $T(1,-1)=0$ ולכן הגרעין אינו אפס.