

אלגברה לינארית להנדסה בר-אילן
מועד א' התשע"ג

ד"ר מיטל אליהו רובינסון.
מתרגלים : אחיה בראון, גילי גולן, גיא לנדסמן.

זמן הבחינה : 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לחלק הראשון ותכננו את חלוקת הזמן!
מספיקות 40 דק לכל אחת מהשאלות האחרות!
מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!
ניתן לצבור לכל היותר 110 נקודות בבחינה אך הציון המרבי הוא 100.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

חלק א'

ענו על אחת מהשאלות הבאות : (20 נק')

1. הוכיחו : תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. אזי $\dim R(A) = \dim C(A)$.
2. א. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ אורתוגונאלית, $\bar{0} \notin S$. הוכיחו : הקבוצה S בת"ל.
ב. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אורתוגונאלית. מצאו מהן האפשרויות ל $|A|$.

חלק ב' - פתרו 2 שאלות מתוך שאלות 3-5 (כל שאלה 30 נק')

3. ע"ע :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ תהי}$$

- א. מצאו $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $B^t B = A$ (לכסנו ליכסון אורתוגונאלי ומצאו מי זו B) – מי שלא ימצא את B יקבל 75% מהניקוד.
- ב. מצאו מהו פירוק SVD של מטריצה זו? – הסבירו! (רמז: אין צורך לחשב...)

4. דטרמיננטות :

א. הוכיחו (באינדוקציה) שהדטרמיננטה של המטריצה הבאה

$$\frac{1}{3}(4^{n+1} - 1) \text{ היא } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- ב. יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $AB \cdot adj(BA) = I$. הוכיחו כי $|AB| = 1$ והשתמשו בכך כדי להוכיח $AB = BA$.

5. העתקות ליניאריות :

- א. תהי $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $T(p(x)) = (p(0))$. הוכיחו ש-T היא הע"ל ומצאו בסיס ומימד ל $\ker T, \text{Im} T$.
- ב. מצאו $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ על או הוכיחו שלא קיימת אחת כזו.
- ג. תהי $T: V \rightarrow V$. הוכיחו: T חח"ע אמ"ם על.

חלק ג': שאלה 6 – חובה!!! – אפשר להשתמש במידע מסעיף לסעיף גם אם לא הצלחתם את הסעיף הקודם! (30 נק')

6. תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ בעלת עמודות בת"ל.

- א. הוכיחו כי $A^T A$ היא הפיכה (רמז: הראו $N(A) = N(A^T A)$).
- ב. נגדיר $B = A(A^T A)^{-1} A^T$. הוכיחו כי $B^2 = B$.
- ג. מצאו לפי סעיף ב' את הערכים העצמיים האפשריים של B .
- ד. הוכיחו כי B לכסינה אורתוגונלית.

2הצלחה!