המשך משיעור קודם

14.2 פרמטר τ של טורוס סיבוב

מסקנה

נתבונן בטורוס סיבוב ב־$\mathbb{R}^3$ המתקבל ע"י סיבוב של עקומת Jordan במישור (x,z), שהיא באורך $L>0$, עם פרמטריזציה $(f(\phi), g(\phi))$ כאשר $\phi \in [0,2]$. אזי הטורוס הוא שקול קונפורמי לטורוס שטוח $\mathbb{R}^3/L_{c,d}$ כאשר $\mathbb{R}^2$ הוא המישור (θ,ψ) ואילו שריג $L_{c,d} \subseteq \mathbb{R}^2$ נפרש ע"י וקטורים ce_1 ו־de_2 כאשר $e_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial\psi}$.

$$L_{c,d} = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\left(c\frac{\partial}{\partial\theta}, d\frac{\partial}{\partial\psi}\right) = c\mathbb{Z} + d\mathbb{Z}$$

כאשר $c = 2\pi$, $d = \int_0^L \frac{\mathrm{d}\phi}{f(\phi)}$.

הוכחה

(θ,ψ): $\boxed{g_{11} = g_{22}}$

$$\psi = \int \frac{\mathrm{d}\phi}{f(\phi)}$$

$$g\left(u^1, u^2\right) = g(\theta,\psi)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f(\varphi(\psi))^2 & 0 \\ 0 & f(\varphi(\psi))^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{g_{ij} = f^2(\varphi(\psi))\ \mathrm{d}_{ij}}$$

מסקנה

פרמטר τ של טורוס סיבוב הוא מדומה טהור:

$$\tau = i\sigma^2$$

כאשר

$$\sigma^2 = \max\left(\frac{c}{d}, \frac{d}{c}\right) \geq 1$$

$$x\left(\theta, \phi\right) = \left(f\cos\theta, f\sin\theta, g\right)$$

$$\tilde{x}\left(\theta, \phi\right) = \left(\lambda f\cos\theta, \lambda f\sin\theta, \lambda g\right)$$

כאשר $\lambda > 0$

$$\tilde{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$$

14.3 θ-לולאות וϕ-לולאות של טורוס סיבוב

הגדרה

- ϕ-לולאה על הטורוס היא לולאה המתקבלת כאשר קובעים θ ואילו ϕ רץ על $[0, L]$.
- θ-לולאה מתקבלת כאשר קובעים ϕ ואילו θ רץ על קטע $[0, 2\pi]$.

למה

כל ϕ לולאות הן באותו אורך שווה L.

הוכחה

פרמטריזציה של ϕ לולאה:

$$\beta\left(\phi\right) = \left(f\left(\phi\right)\cos\theta_0, f\left(\phi\right)\sin\theta_0, g\left(\phi\right)\right)$$

$$\left\|\beta'\left(\phi\right)\right\| = f'^2\cos^2\theta_0 + f'^2\sin^2\theta + g'^2 = f'^2 + g'^2$$

אורך של ϕ לולאה הוא אינטגרל:

$$\int_0^L \left\|\beta'\left(\phi\right)\right\| \,\mathrm{d}\phi = L$$

למה

θ-לולאות על טורוס סיבוב הן באורך משתנה(תלוי בϕ)

$2\pi\chi = 2\pi f\left(\phi\right)$

הוכחה

פרמטריזציה של θ-לולאה:

$$\gamma\left(\theta\right)=\left(f\left(\phi_{0}\right)\cos\theta,f\left(\phi_{0}\right)\sin\theta,g\left(\phi_{0}\right)\right)$$

$$\gamma'\left(\theta\right)=\left(f\left(\phi_{0}\right)\left(-\sin\theta\right),f\left(\phi_{0}\right)\cos\theta,0\right)$$

$$\left\Vert \gamma'\left(\theta\right)\right\Vert ^{2}=f\left(\phi_{0}\right)^{2}$$

$$\left\Vert \gamma'\left(\theta\right)\right\Vert =\left|f\left(\phi_{0}\right)\right|$$

אורך של θ-לולאה הוא אינטגרל

$$\int_{0}^{2\pi}\left\Vert \gamma'\left(\theta\right)\right\Vert \,\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{2\pi}\left|f\left(\phi_{0}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta=2\pi\left|f\left(\phi_{0}\right)\right|$$

14.4 טורוס מוגדר ע"י מעגל

$$f\left(\phi\right)=a+b\cos\phi\qquad g\left(\phi\right)=b\sin\phi$$

$$\underline{x}\left(\theta,\phi\right)=\left(\left(a+b\cos\phi\right)\cos\theta,\left(a+b\cos\phi\right)\sin\theta,b\sin\phi\right)$$

$$\left|\phi\text{-loop}\right|=2\pi b$$

$$\left|\theta\text{-loop}\right|=2\pi\left(a+b\left(0\right)\phi_{0}\right)$$

14.5 פרמטר τ של טורוס סיבוב, שאריות

$$\tau=i\max\left(\frac{c}{d},\frac{d}{c}\right)$$

$$c=2\pi$$

$$d=\int_{0}^{L}\frac{\mathrm{d}\phi}{f\left(\phi\right)}$$

משפט

טורוס שטוח שהוא שקול קונפורמי לטורוס סיבוב הוא טורוס $\mathbb{C}/L$, $L=\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\left(c\frac{\partial}{\partial\theta},d\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$.

לכן $c=2\pi$ ו $d=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}$, $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\left(ce_1,de_2\right)$.

לכן פרמטר τ הוא

$$\tau=i\max\left(\sqrt{\left({}^{a}\!/\!{}_{b}\right)^2-1},\left(\left({}^{a}\!/\!{}_{b}\right)^2-1\right)^{-1/2}\right)$$

הוכחה

$$d=\int_0^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{f\left(\varphi\right)}=\int_0^{L=2\pi b}\frac{\mathrm{d}\varphi}{a+b\cos\left(\frac{\varphi}{b}\right)}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{b}\,\mathrm{d}\phi}{a+b\cos\phi}$$

$$\phi=b\varphi\qquad\mathrm{d}\phi=b\,\mathrm{d}\varphi\qquad\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{b}\,\mathrm{d}\phi$$

$$\boxed{d=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\left({}^{a}\!/\!{}_{b}\right)+\cos\phi}}$$

$$a'={}^{a}\!/\!{}_{b}$$

$$d=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{a'+\cos\phi}$$

$$\cos\phi=\operatorname{Re}\left(e^{i\phi}\right)$$

$$\cos\phi=\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)$$

$$d=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{a'+\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)}$$

$$z=e^{i\phi}$$

$$\mathrm{d}z=ie^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi=iz\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}\phi=\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\phi=\frac{-i\,\mathrm{d}z}{z}$$

$$d=\oint_{|z|=1}\frac{-\frac{i\,\mathrm{d}z}{z}}{a'+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\oint_{|z|=1}\frac{-2i\,\mathrm{d}z}{2za'+z^2+1}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2a'z+1}$$

$$z^2+2a'z+1=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$$

$$\lambda_1=-a'+\sqrt{a'^2-1}\qquad\lambda_2=-a'-\sqrt{a'^2-1}$$

$\boxed{-a'-\sqrt{a'^2-1}<1}$ בגלל ש $a'>1$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2a'z+1}=2\pi i\mathrm{Res}\left(f,\lambda_1\right)$$

כאשר $f=\dfrac{1}{z^2+2a'z+1}$

$$\mathrm{Res}\left(f,\lambda_1\right)=\lim_{z\to\lambda_1}f\left(z\right)\left(z-\lambda\right)=\lim_{z\to\lambda_1}\frac{\cancel{z-\lambda_1}}{\cancel{z-\lambda_1}\left(z-\lambda_2\right)}=\lim_{z\to\lambda_1}\frac{1}{z-\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}$$

$$\mathrm{Res}\left(f,\lambda_1\right)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2\sqrt{a'^2-1}}$$

$$d=-2i\oint\frac{\mathrm{d}z}{f\left(z\right)}=-2i\cdot2\pi i\mathrm{Res}\left(f,\lambda_1\right)=4\pi\mathrm{Res}\left(f,\lambda_1\right)=$$

$$=4\pi\frac{1}{2\sqrt{a'^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a'^2-1}}$$

$$d=\frac{2\pi}{\sqrt{\left({}^{a}\!/\!_{b}\right)^2-1}}$$

$$\frac{d}{c}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}$$

$$\frac{c}{d}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$$

$$\boxed{\tau=i\max\left(\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2-1\right)^{\pm{}^{1}\!/\!_{2}}\right)}$$

חזרה למבחן

(א)

הגדר עקמומיות ראשיות k_1,k_2.

יחס בין העתקת Weingarten לL_{ij}:

$$L_{ij} = -L^k{}_j g_{ik}$$

נכפיל משני הצדדים בg^{im}

$$L_{ij} g^{im} = -L^k{}_j g_{ik} g^{im}$$

$$g_{ik} g^{im} = g_{ki} g^{im} = \delta_k{}^m$$

$$L_{ij} g^{im} = -L^k{}_j \delta_k{}^m = -L^m{}_j$$

$$\boxed{L^m{}_j = -L_{ij} g^{im}}$$

k_1 וk_2 הם ערכים עצמיים על $\left(L^m{}_j\right)$.

(ב)

מצא בסיס מתאים ובטא העתקת Weingarten בתור מטריצה.

$$W_p\left(\underline{x}_i\right) = L^j{}_i x_j$$

$$L^m{}_j = -L_{ij} g^{im}$$

אם $g^{12} 0 =$ אזי

$$L^m{}_j = -L_{mj} \underline{g^{mm}}$$

$$L^1{}_2 = L^2{}_1 = 0$$

$$L^1{}_1 = -L_{11} g^{11} \qquad L^2{}_2 = -L_{22} g^{22}$$

לכן W_p מתבטא ע"י

$$L^i{}_j = \begin{pmatrix} -L_{11} g^{11} & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}$$

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left(g^{kl}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{22}} \end{pmatrix}$$

לכן

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} \qquad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$$

$$L^i{}_j = -\begin{pmatrix} \frac{L_{11}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{L_{22}}{g_{22}} \end{pmatrix}$$

$$K = \det W_p = L^1{}_1 L^2{}_2 - L^1{}_2 L^2{}_1$$

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(W_p\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)$$

$$\boxed{L^1{}_1 + L^2{}_2 = \lambda_1 + \lambda_2}$$