תרגיל כיתה 7

$$N\left(a+b\sqrt{10}\right)=a^2-10b^2$$

$$\left(a+b\sqrt{10}\right)\left(a-b\sqrt{10}\right)$$

נסמן: $\boxed{k=a^2-10b^2}$

$$a^2=k \pmod{10}$$

הערכים שיכולים להתקבל ב$\pmod{10}$ הם $\{0,1,4,5,6,9\}$.

$$k\neq 3 \pmod{10}$$

$$N(3)=9$$

לא קיימים איברים ב$\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ שהנורמה שלהם היא $\pm 2\vee\pm 3$
נניח ש

$$\left(a_1+b_1\sqrt{10}\right)\left(a_2+b_2\sqrt{10}\right)=3$$

ז"א

$$N\left(a_1+b_1\sqrt{10}\right)\cdot N\left(a_2+b_2\sqrt{10}\right)=9$$

נניח ש

$$a_1+b_1\sqrt{10},a_2+b_2\sqrt{10}$$

איברים לא הפיכים. אזי

$$N\left(a_1+b_1\sqrt{10}\right)\neq\pm 1\qquad N\left(a_2+b_2\sqrt{10}\right)\neq\pm 1$$

$$a+bi+\langle 1+i\rangle=a+bi-\underbrace{b(1+i)}_{\in\langle 1+i\rangle}+\langle 1+i\rangle=a-b+\langle 1+i\rangle$$

$$\overline{a+bi}=\overline{a-b}$$

$$N(1+i)=2$$

כל אידיאל $I\lhd\mathbb{Z}\left[\sqrt{D}\right]$ מכיל מספר טבעי ולכן $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]/I$ סופי

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]/I=\left\{a+b\sqrt{D}+I\right\}=\left\{a+b\sqrt{D}+I\;\middle|\;\begin{array}{c}0<a,b<N\\ N=a^2-Db^2=N\left(a+b\sqrt{D}\right)\end{array}\right\}$$

x^2+2 הוא איבר ראשוני ב-$\mathbb{Z}[x]$

$$\varphi:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]$$

$$\varphi(f(x))=f\left(\sqrt{-2}\right)$$

$$\ker\varphi=h\left(x^2+2\right)=\left\langle x^2+2\right\rangle$$

תרגיל כיתה 8

הגדרה

תחום שלמות R נקרא "אטומי" או "תחום פריקות" אם כל איבר $a\in R$ מתפרק למכפלה $u\cdot p_1\cdots p_n$ כאשר $u\in U(R)$ (משמע הפיך) ו-$p_1,\dots p_n$ אי פריקים.

דוגמאות

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[x]$, ו-$\mathbb{F}[x]$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה.

הגדרה

תחום אטומי R נקרא "תחום פריקות יחידה" אם לכל שני פירוקים של אותו איבר $u\cdot p_1\cdots p_n$ ו-$v\cdot q_1\cdots q_m$ מתקיים $m=n$ וגם יש תמורה $\sigma\in S_n$ כך ש-$p_k\sim q_{\sigma(k)}$.

דוגמה

- $\mathbb{Z}$

$$-42$$

$$2\cdot(-3)\cdot 7\qquad 7\cdot(-2)\cdot 3$$

נחליף את הסדר בשמאלי:

$$7\cdot 2\cdot(-3)\qquad 7\cdot(-2)\cdot 3$$

ואז

$$7\sim 7\qquad 2\sim -2\qquad -3\sim 3$$

- $\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ איננו תחום פריקות יחידה.

$$6=2\cdot 3=\left(4-\sqrt{10}\right)\left(4+\sqrt{10}\right)$$

אבל

$$2,3\not\sim 4-\sqrt{10},3+\sqrt{10}$$

משפט

כל תחום ראשי הוא תחום פריקות יחידה

מסקנה

$\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ איננו תחום ראשי.

משפט

בתחום ראשי R, a אי פריק $\Leftrightarrow$ $\langle a\rangle$ מקסימלי

הוכחה

$\Leftarrow$ אם $\langle a\rangle\subset I\subset R$ אז מכיוון שR ראשי קיים $b\in R$ כך ש$I=\langle b\rangle$, ולכן קיים $c\in R\backslash U\left(R\right)$ כך ש$a=bc$.

$$\langle a\rangle\subsetneq\langle b\rangle\subset R$$

אנחנו יודעים שאם $b\sim a$ אז $\langle a\rangle=\langle b\rangle$. מכיוון ש$\langle a\rangle\subset\langle b\rangle$ אז $b|a$ וגם $b\nmid a$, ולכן קיים c לא הפיך כך ש$b=ac$.

$\Rightarrow$ נתון ש$\langle a\rangle$ מקסימלי. צריך להוכיח שa אי פריק. נניח בשלילה שa פריק, ז"א קיימים b,c לא הפיכים כך ש$a=b\cdot c$

$$\langle a\rangle\subset\langle b\rangle$$

כי אם $x\in\langle a\rangle$ אז

$$x=a\cdot y=b\cdot c\cdot y\in\langle b\rangle$$

בסתירה למקסימליות.

תרגיל

הראה כי בתחום ראשי, $p\in R$ אי פריק $\Leftrightarrow$ הוא ראשוני.

פתרון

ראינו כי ראשוני $\Leftarrow$ אי פריק. צריך להראות את הכיוון השני.
אם p אי פריק אז $\langle p\rangle$ מקסימלי ולכן $\langle p\rangle$ ראשוני. ז"א p ראשוני.

הגדרה

יהי R תחום שלמות. פונקציה $d:R\to\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$ המקיימת

$$d\left(x\right)\Leftrightarrow x=0$$

נקראת אוקלידית אם

1. $d\left(a\right)\leq d\left(a\cdot b\right)$ לכל $a,b\in R$
2. לכל $b\neq 0$ ולכן a, קיימים $q,r\in R$ כך ש-$a=qb+r$ וגם $d\left(r\right)<d\left(b\right)$

אם קיימת פונקציה כזו עבור R אז הוא נקרא תחום אוקלידי.