שאלה 1

א) $I = \langle 4x+1 \rangle \triangleleft \mathbf{Z}[x]$

נמצא למה חוג המנה $\frac{\mathbf{Z}[x]}{I}$ איזומורפי:

נביט בהומומורפיזם $f: Z[x] \to Q$ המוגדר כהומומורפיזם ההצבה של $-\frac{1}{4}$ ב x (זה הומומורפיזם של חוג המכיל את $Z[x]$, $Q[x]$ ולכן בפרט הומומורפיזם של הפולינומים מעל השלמים).

לכל $p \in < 4x + 1 >$ ‏ f(p)=0 כי p(x)=q(x)*(4x+1) עבור q פולינום כלשהו והצבה בביטוי זה של מינוס רבע תיתן אפס.

מנגד אם $p \in \ker(f)$ זה גורר p(-0.25)=0, אם נסתכל על ההעתקה והחוג שלנו כתת חוג של $Q[x]$ נקבל ש $p \in < x + 0.25 > = < 4x + 1 >$ (כפי שהוכחנו בתירגול הגרעין של הומו' ההצבה ב a הוא האידאל הראשי הנוצר ע"י x-a ובנוסף הכפלה באיבר הפיך של כל איברי האידאל לא משנה אותו) ולכן p(x)=q(x)*(4x+1) עבור q פולינום ב $Q[x]$.

האיבר החופשי של q מוכרח להיות טבעי משום ש p הוא פולינום מעל הטבעיים והאיבר החופשי שלו הוא $1 * q_0$. באינדוקציה ניתן להוכיח שכל מקדמי q טבעיים משום שעבור המקדם ה n- מתקיים $q_n + 4 * q_{n-1}$ הוא המקדם ה- n של p ומכיוון שידוע שהוא שלם (ומהנחת האינדוקציה) זה גורר ש- q_n שלם. ובסה"כ זה גורר $p \in < 4x + 1 >$, הפעם כאשר הכוונה לאידאל בחוג הפולינומים השלמים.

ולכן $\ker(f) = < 4x + 1 >$. ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל:

$$\frac{\mathbf{Z}[x]}{< 4x + 1 >} \cong \mathrm{Im}(f) < Q$$

Q שדה לכן כל תת חוג שלו הוא תחום שלמות, לכן האידאל I **ראשוני.**

מנגד $f(x+1)=\frac{-3}{4}$ אך $-\frac{4}{3}$ לא שייך לתמונה (קל לראות שהתמונה כוללת רק מספרים שניתן להציג כמנה של מספר שלם בחזקה של 4 ו $\frac{-4}{3}$ איננו ניתן להצגה כזו כי המכנה תמיד יתחלק ב 3). ולכן התמונה איננה שדה, ומכיוון $Z[x]$ קומוטטיבי **לא יתכן ש I מקסימלי** (אחרת המנה צריכה להיות שדה).

ב) $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in Q\right\} \triangleright \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | b \in Q\right\} = I$

נביט בהומומורפיזם $f: R \to Q$ המוגדר כך:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$$

נוכיח שזה אכן הומומורפיזם של חוגים:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} ac & bc + ad \\ 0 & ac \end{pmatrix} = ac = f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & ac+ \end{pmatrix} = a + c = f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$f(1_R) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

כל התכונות מתקיימות ולכן זה אכן הומומורפיזם.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \ker(f) \leftrightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow a = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in I$$

ולכן $\ker(f) = I$.

בנוסף לכל $q \in Q$ ניתן לבחור את המטריצה $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in R$ ועבורה $f\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = q$ ולכן $\mathrm{Im}(f) = Q$.

ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל:

$$\frac{R}{I} \cong Q$$

חוג המנה היינו שדה ולכן I הוא **אידאל מקסימלי וראשוני.**

<u>**פתרון נוסף (תודה לעידן ריין):**</u> נשים לב לכך ש I הינו בדיוק הקבוצה המכילה את כל האיברים הלא הפיכים ב R.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R/U(R) \leftrightarrow a^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow a = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in I$$

המעברים האחרונים מתאפשרים בגלל העובדה שמטריצה הפיכה בחוג R אמ"מ היא הפיכה בחוג המטריצות מגודל 2 על 2 (ושבו מטריצה הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה שלה שונה מאפס).
גרירה משמאל לימין טריוואלית כי אם קיימת הופכית ב R בפרט קיימת הופכית בחוג המטריצות הכולל, ומימין לשמאל נובעת מכך שההופכית של מטריצה ב R היא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in I$$

מכיוון שקבוצת הלא הפיכים הינה אידאל ו R הוא חוג קומוטטיבי נובע R חוג מקומי ולכן אידאל הלא הפיכים I הוא האידאל הוא המקסימלי היחיד (**ובפרט מקסימלי -ולכן גם ראשוני**) .

כמו כן ניתן להראות איזומורפיזם ל $\frac{Q[x]}{x^2}$ ע"י הומומורפיזם $f(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$.

ג) $R = \frac{F_3[x]}{<x^4-16>} = <\overline{x+1}> = I$

$<\overline{x+1}>$ הוא האידאל הנוצר ע"י המחלקה $x+1+<x^4-16>$ בחוג המנה.

מכיוון שמתקיים:

$$<x^4-16> = <x^4-1> = <(x-1)(x+1)(x^2+1)> \subseteq <x+1>$$

אז כל מחלקה של $<x^4-16>$ הנמצאת ב $<\overline{x+1}>$ מוכלת בתוך $<x+1>$.

לכן מתקיים $<\overline{x+1}> = \frac{<x+1>}{<x^4-16>}$ ואז ממשפט האיזומורפיזם השלישי נקבל:

$$\frac{R}{I} = \frac{\left(\frac{F_3[x]}{<x^4-16>}\right)}{\left(\frac{<x+1>}{<x^4-16>}\right)} \cong \frac{F_3[x]}{<x+1>}$$

$<x+1>$ הוא הגרעין של המורפיזם ההצבה עבור הצבה של 1- . כפי שראינו המורפיזם זה הוא הוא על (מ $F_3[x]$ ל F_3) ולכן מאיזומורפיזם הראשון חוג המנה איזומורפי ל F_3.

חוג המנה היינו שדה ולכן I הוא **אידאל מקסימלי וראשוני.**

<u>שאלה 2</u>

יהי חוג R

א) יהי $I \lhd R$ אידאל ראשוני

<u>**צ"ל:**</u> I ראשוני למחצה (ז"א $\frac{R}{I}$ חוג ראשוני למחצה)

נניח בשלילה שקיים $0 \neq J \lhd \frac{R}{I}$ אידאל כלשהו בחוג המנה כך ש $J^2 = 0$.

מכיוון ש I אידאל ראשוני, בחוג $\frac{R}{I}$ אידאל האפס הוא אידאל ראשוני .

לכן מכיוון ש $J * J \lhd 0$ זה גורר $J \lhd 0$ וזה אומר ש $J = 0$ בסתירה.

ולכן **I אידאל ראשוני למחצה.**

ב)

($\leftarrow$) <u>**נתון**</u>: $P \lhd R$ ראשוני למחצה, $I \lhd R$ כך ש $I^2 \lhd P$

<u>**צ"ל:**</u> $I \lhd P$

$I \lhd P + I$ ולכן ממשפט ההתאמה נקבל $\frac{R}{P} \lhd \frac{I+P}{P}$.

יהי $j+P, i+P \in \frac{I+P}{P}$ כאשר $j, i \in I$ (ניתן להשמיט את האיבר מ P כי $i+p$ ו i נמצאים באותו הקוסט של P עבור $p \in P$).

מכיוון $P \lhd I^2$ זה גורר $P \lhd I^2 \ni j*i$ ולכן:

$$(j+P)(i+P) = j*i+P = P = 0_{\frac{R}{P}}$$

לכן כל המכפלות של איברי האידאל $\frac{I+P}{P}$ הם אפס מה שאומר ש $\left(\frac{I+P}{P}\right)^2 = 0$ (כי אם כל המכפלות הן אפס גם כל סכומי המכפלות הם אפס).
מכיוון ש $\frac{R}{P}$ חוג ראשוני למחצה (כי P אידאל ראשוני למחצה) זה אומר ש $\frac{I+P}{P} = 0$ ולכן $P \lhd I+P$,
וזה קורה רק כאשר $\mathbf{P \lhd I}$ **.**

(→) **<u>נתון</u>**: $P \lhd R$, לכל $I \lhd R$ אם $P \lhd I^2$ אז $P \lhd I$

<u>צ"ל:</u> P ראשוני למחצה

יהי $0 \neq J \lhd \frac{R}{P}$ אידאל כלשהו בחוג המנה כך ש $J^2 = 0$.

ממשפט ההתאמה קיים אידאל $P \lhd I \lhd R$ כך ש $J = \frac{I}{P}$.

יהי $\sum i_n j_n \in I^2$ $(\forall n: j_n, i_n \in I)$ - כל איברי I^2 ניתנים להצגה כך. נשים לב ש:

$$\sum i_n j_n + P = \sum (i_n + P)(j_n + P) \in J^2 = 0$$

ומכיוון ש $\{P\} = \left\{0_{\frac{R}{P}}\right\} = 0$ נקבל ש $\sum i_n j_n \in P$.

ז"א $P \lhd I^2$ ומהנתון זה גורר $P \lhd I$ ולכן $J = \frac{I}{P} = 0$ בסתירה. ולכן **P אידאל ראשוני למחצה**.

ג)

(←)**<u>נתון</u>**: R ראשוני למחצה

<u>צ"ל:</u> לא קיים אידאל נילפוטנטי ב R

נניח בשלילה שקיים $0 \neq I \lhd R$ נילפוטנטי. נבחר k כך ש $I^k = 0$ והוא החזקה המינימלית עבורה זה קורה (קיימת כי קבוצת הטבעיים $\{k \in N | I^k = 0\}$ היא תת קבוצה של הטבעיים ולכן קיים לה מינימום).

$k \geq 2$ (אם *k=1* נקבל $I = 0$ בסתירה) ולכן:

$$k \geq 2 \to 2k \geq 2+k \to 2(k-1) \geq k$$

וזה גורר:

$$\left(I^{k-1}\right)^2 = I^{2(k-1)} \lhd I^k = 0 \to \left(I^{k-1}\right)^2 =$$

$$0$$

אבל מהמינימליות של k

$$\mathrm{I}^{\mathrm{k}-1} \neq 0$$

וזו סתירה לכך ש P חוג ראשוני למחצה.

$(\rightarrow)$ **<u>נתון</u>**: לא קיים אידאל נילפוטנטי ב R

<u>צ"ל:</u> R ראשוני למחצה

לא קיים אידאל נילפוטנטי ב R משום סדר ובפרט לא קיים אידאל נילפוטנטי מסדר 2, ז"א אידאל $R \rhd \mathrm{I} \neq 0$ כך ש $\mathrm{I}^2 = 0$ ולכן R חוג ראשוני למחצה.

ד) יהי אידאל כלשהו ב Z .ראינו בהרצאה שכל האידאלים ב Z הוא מהצורה $n\boldsymbol{Z}$.

מסעיף ב מספיק להראות שקיים או לא קיים אידאל mZ כך ש:

1) mZ לא מוכל ב $n\boldsymbol{Z}$ $\leftrightarrow$ n לא מחלק את m
2) $(\mathrm{m}\boldsymbol{Z})^2 = m^2\mathbf{Z} \subseteq n\boldsymbol{Z}$ $\leftrightarrow$ m^2 מתחלק ב n

כדי לקבוע האם $n\boldsymbol{Z}$ אידאל ראשוני.

נכתוב את n כמכפלת גורמים ראשוניים זרים:

$$\boldsymbol{n} = \prod \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}}$$

$$\forall i{:}\, a_i \geq 1$$

אם קיים i כך ש $a_i \geq 2$ נבחר:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}-\boldsymbol{1}} \prod_{j \neq i} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{j}}}$$

m לא מתחלק ב $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}}$ ולכן n לא מחלק את m והתנאי הראשון מתקיים. מצד שני m^2 מתחלק ב n (מחלק את כל הגורמים הראשוניים בחזקה המתאימה) ולכן גם התנאי השני מתקיים. ולכן בסה"כ האידאל איננו ראשוני למחצה.

אם $\forall i{:}\, a_i = 1$ נקבל מהתנאי השני ש m מתחלק בכל הגורמים הראשוניים של n ומכיוון שהם ראשוניים מתחלק גם במכפלתם. לכן $n = \prod p_i^1 | m$ בסתירה לתנאי הראשון. ולכן לא קיים m שכזה מה שאומר שהאידאל ראשוני למחצה.

ובשורה התחתונה:

$n\boldsymbol{Z}$ אידאל ראשוני למחצה אם ורק אם n הוא מכפלה של ראשוניים שונים

או במילים אחרות: **$\boldsymbol{nZ}$ אידאל ראשוני למחצה אם ורק אם $\boldsymbol{n}$ חף מריבועיים**

שאלה 3

$\mathrm{R}=\mathrm{Q}[x]$ יחד עם פונקציית הדרגה (מרחב ופונקציה אוקלידית כפי שראינו בהרצאה)
$a=x\ ,\ b=x+1$

$$\deg(a)=\deg(b)=1$$

ומנגד $\langle b\rangle\neq\langle a\rangle$ מכיוון שלדוגמא $x+1\in\langle b\rangle$ אך לא שייך ל $\langle a\rangle$ (כפי שראינו בתירגול $\langle a\rangle$ הוא בעצם הגרעין של המורפיזם ההצבה של 0 אבל הצבה של אפס בפולינום $x+1$ לא תיתן אפס).

שאלה 4

א) נחלק את הפולינום $g(x)=x^3-2x^2+x+4$ עם שארית בפולינום $f(x)=x^2+x+1$.
נקבל $x^3+2x^2+x+4=(x-3)(x^2+x+1)+(3x+7)$.
כעת נחלק את x^2+x+1 עם שארית ב$3x+7$ ונקבל:
$x^2+x+1=\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)(3x+7)-\frac{37}{9}$.
לכן, לפי אלגוריתם אוקלידס נקבל:

$$\gcd(x^3-2x^2+x+4,x^2+x+1)=$$
$$\gcd(x^2+x+1,3x+7)=$$
$$\gcd\left(3x+7,-\frac{37}{9}\right)=1\ \blacksquare$$

<u>הערה:</u> ניתן גם לראות כי אם נסתכל בממשיים נקבל שלפולינום $f(x)=x^2+x+1$ אין שורשים: $\Delta\big(f(x)\big)=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$. לכן הוא לא פריק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$ ובפרט מעל $\mathbb{Q}$. לכן רק קבועים והוא עצמו מחלקים אותו, וכיוון שהוא לא מחלק את $g(x)=x^3-2x^2+x+4$, בהכרח מתקיים שהמחלק המשותף המקסימלי הוא קבוע, וכפולינום מתוקן הוא 1.

ב) נחלק את הפולינום $f(x)=x^3+2x^2+3x-3$ עם שארית בפולינום $g(x)=x^2-1$.
נקבל $x^3+2x^2+3x-3=(x+2)(x^2-1)+(4x-1)$.
נתקן את השארית:

$$(4x-1)\cdot4^{-1}=x-4^{-1}\overset{(4^{-1}=4\ in\ \mathbb{F}_5)}{=}x-4$$

כעת נחלק את x^2-1 עם שארית ב$x-4$:

$$x^2-1=x^2-4\cdot4=(x+4)(x-4)+0$$

קיבלנו $(x-4)|(x^2-1)$, ולכן לפי אלגוריתם אוקלידס:

$$\gcd(x^3+2x^2+3x-3,x^2-1)=$$
$$\gcd(x^2-1,x-4)=x-4\ \blacksquare$$

שאלה 5

נגדיר פונקציה $\delta:R\to\mathbb{N}\cup\{0,-\infty\}$ על ידי $\delta(a)=\min\{d(xa)|0\neq x\in R\}$.
נוכיח כי זוהי פונקציה אוקלידית.
תחילה, יהי $0\neq a\in R$. אזי

$$\delta(a)=\min\{d(xa)|0\neq x\in R\}>d(0)=\min\{d(x\cdot0)|0\neq x\in R\}=\delta(0)$$

כעת, יהיו $a,b\in R\ (b\neq0)$. נניח $b|a$, כלומר קיים $q\in R$ כך ש$a=qb$. לכן מתקיים

$$a \in \langle b \rangle \Rightarrow \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$$

נקבל:

$$\delta(b) = \min\{d(bx)|0 \neq x \in R\} = \min\{d(c)|0 \neq c \in \langle b \rangle\}$$
$$\leq \min\{d(c)|0 \neq c \in \langle a \rangle\} = \min\{d(ax)|0 \neq x \in R\} = \delta(a)$$

ובסך הכל $b|a \Rightarrow \delta(b) \leq \delta(a)$.

נותר להוכיח את התנאי הראשון של פונקציה אוקלידית.

יהיו $a, b \in R\ (b \neq 0)$. נסמן $b \cdot c$ להיות האיבר שנותן את ערך הd המינימלי, כלומר

$$d(b \cdot c) = \delta(b)$$

יהיו $q, r \in R$ כך ש$a = q \cdot (bc) + r, d(bc) > d(r)$.

לפי הגדרת δ, מתקיים

$$\forall a \in R: \delta(a) = \min\{d(ax)|0 \neq x \in R\} \leq d(a \cdot 1) = d(a)$$

ולכן נקבל $\delta(b) = d(bc) > d(r) \geq \delta(r)$. בנוסף,

$$a = q \cdot (bc) + r = (qc) \cdot b + r$$

כלומר מצאנו $p, r \in R\ (p = qc)$ כך ש$a = pb + r, \delta(b) > \delta(r)$.

הוכחנו את כל התנאים, לכן δ היא פונקציה אוקלידית. ■

<u>שאלה 6</u>

נגדיר יחס סדר חלקי על הקבוצה $\mathcal{P}$ על ידי: $I_1 \geq I_2 \Leftrightarrow I_1 \subseteq I_2$. נוכיח כי זהו יחס סדר חלקי.

- <u>רפלקסיבי:</u> יהי $I \in \mathcal{P}$. ברור $I \subseteq I$ ולכן $I \geq I$.
- <u>אנטי סימטרי</u>: יהיו $I, J \in \mathcal{P}$ כך ש$I \subseteq J, J \subseteq I$. אז ברור $I = J$.
- <u>טרנזיטיבי:</u> יהיו $I, J, K \in \mathcal{P}$ כך שמתקיים $I \subseteq J, J \subseteq K$. אז ברור $I \subseteq K$.

לכן זהו יחס סדר חלקי.

תהי שרשרת של אידיאלים ראשוניים $\mathcal{P} \ni I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots.$ נתבונן בקבוצה $I := \bigcap_n I_n$. נוכיח כי I אידיאל ראשוני של R. יהיו $A, B \lhd R$ כך ש A, Bלא מוכלים ב$I = \bigcap_n I_n$. לכן קיים kעבורו A, B לא מוכלים בI_k. I_k ראשוני, לכן גם AB לא מוכל בו. לכן בפרט AB לא מוכל בחיתוך כל האידיאלים בשרשרת. כלומר, קיבלנו כי $\bigcap_n I_n$ ראשוני. לכל k מתקיים $I_k \supseteq \bigcap_n I_n$ כלומר זהו חסם מלעיל על השרשרת. לכן לכל שרשרת של אידיאלים ראשוניים ב$\mathcal{P}$ יש חסם מלעיל, ולפי הלמה של צורן נקבל שקיים אידיאל ראשוני מקסימלי לפי יחס הסדר שהגדרנו, כלומר מינימלי ביחס להכלה. ■