בוחן 2 מבנים אלגבריים הנדסה תשעח

24.12.2017

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על 3 מתוך 4 שאלות.
- **כתבו בדף הראשון של המחברת את הת.ז. שלכם בצורה ברורה.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו כל תשובה.
- כל שאלה 34 נקודות.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

1. הערה: הסימון $A \trianglelefteq B$ פירושו ש A תת חבורה נורמלית של B.

(א) תהא G חבורה ו $N,K \trianglelefteq G$ שני תתי חבורות נורמליות שלה. הוכיחו/הפריכו: $N \cap K \trianglelefteq G$.
פתרון: הוכחה: לכל $x \in N \cap K$ ולכל $g \in G$ צריך להוכיח כי $g^{-1}xg \in N \cap K$. אכן אם $x \in N \cap K$ אזי $x \in N$ וגם $x \in K$ ולכן לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}xg \in N$ וגם $g^{-1}xg \in K$ ולכן גם

$$g^{-1}xg \in N \cap K$$

כנדרש.

(ב) תהא G חבורה ו $N,K \leq G$ שני תתי חבורות כך ש $K \trianglelefteq G$ וגם $N \trianglelefteq K$. הוכיחו/הפריכו: $N \trianglelefteq G$.
פתרון: הפרכה: עבור $G = S_4$ מתקיים כי $K = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ חבורה נורמלית ב S_4 וגם $N = \{id, (1,2)(3,4)\}$ נורמלית ב K כי $|K/N| = \frac{|K|}{|N|} = \frac{4}{2} = 2$ (ומשיעורי בית, במקרה זה N נורמלית) אבל N אינה נורמלית ב G כי עבור $g = (1,3) \in G, (1,2)(3,4) \in N$ מתקיים כי

$$g^{-1}(1,2)(3,4)\,g = (3,2)(1,4) \notin N$$

2. תהא G חבורה קומטטיבית. נגדיר $D = \{(g,g) : g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זוהי תת חבורה נורמאלית של $G \times G$ והראו כי

$$G \times G / D \cong G$$

פתרון: טענה D היא תת חבורה. הוכחה $(e,e) \in D$ לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל D. אם $(g_1,g_1), (g_2,g_2) \in D$ אזי גם הכפל שלהם $(g_1g_2, g_1g_2) \in D$. אם $(g,g) \in D$ אזי גם ההפוכי שלו $(g^{-1}, g^{-1}) \in D$. ולכן D תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.

כעת נגדיר

$$\phi : G \times G \to G$$

ע"י

$$(x,y) \to xy^{-1}$$

טענה זהו אפימורפיזים. הוכחה:

$$\phi((x,y)(z,w)) = \phi((xz,yw)) = xz(yw)^{-1} = xzw^{-1}y^{-1} = xy^{-1}zw^{-1} = \phi((x,y))\,\phi((z,w))$$

בנוסף לכל $g \in G$ ניקח את (g,e) כמקור. כעת נחשב את הגרעין

$$\ker\phi = \{(x,y) \in G \times G : \phi(x,y) = e\} = \left\{(x,y) \in G \times G : xy^{-1} = e\right\} = \{(x,y) \in G \times G : x = y\} = D$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

3. תהא G חבורה. תהא H תת חבורה של G. נגדיר $K = \bigcap_{g \in G}\left(g^{-1}Hg\right)$. מתקיים כי K תת חבורה של H (אין צורך להוכיח זאת). הוכיחו כי K תת חבורה נורמלית של H.
פתרון : יהא $k \in K$ ו $h \in H$ צ"ל כי $h^{-1}kh \in K$. צריך להוכיח כי לכל $g \in G$ מתקיים כי $h^{-1}kh \in g^{-1}Hg$

. יהא $g \in G$ נתון ונראה כי $h^{-1}kh \in g^{-1}Hg$. כיוון ש $k \in K$ בפרט $k \in \left(gh^{-1}\right)^{-1} H \left(gh^{-1}\right)$ (כי $gh^{-1} \in G$) כלומר

$$k \in hg^{-1}Hgh^{-1}$$

כלומר קיים $h' \in H$ כך ש

$$k = hg^{-1}h'gh^{-1}$$

ואז

$$h^{-1}kh = h^{-1}\left(hg^{-1}h'gh^{-1}\right)h = g^{-1}h'g \in g^{-1}Hg$$

כנדרש.

4. יהיו G_1, G_2 חבורות סופיות. תהא $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם. הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל $g \in G_1$ מתקיים כי הסדר של $\phi(g)$ מחלק את הסדר של g. כלומר $o(\phi(g))|o(g)$.
פתרון : יהא $g \in G_1$. נסמן $n = o(g)$ ואז

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(g^n) = [\phi(g)]^n$$

כאשר e_i הוא האיבר הנטרלי של G_i. ולכן $o(\phi(g))|n$.

(ב) לכל תת חבורה נורמלית H של G_1 מתקיים כי $\phi(H) = \{\phi(h) \,|\, h \in H\}$ תת חבורה נורמלית של G_2.
פתרון : הפרכה: $H = G_1 = \mathbb{Z}_2$ ו $G_2 = S_4$ ונגדיר $\phi : \mathbb{Z}_2 \to S_4$ ע"י $\phi(0) = id$, $\phi(1) = (1,2)$ אז ϕ הומורפיזם. כי עבור $a, b \in \mathbb{Z}_2$ אם $a = b$ אז

$$\phi(a+b) = \phi(0) = id = \phi(a)\phi(b)$$

ואם $a \neq b$ נקבל .

$$\phi(a+b) = \phi(1) = (1,2) = \phi(a)\phi(b)$$

בנוסף $\phi(H) = \{id, (1,2)\}$אינה נורמלית ב S_4 כי $\sigma = (2,3) \in S_4$ ו $\tau = (1,2) \in \phi(H)$ מקיימים

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (1,3) \notin \phi(H)$$