מבנים דיסקרטיים – תרגול 6

תתי חבורות:

תת חבורה: תהי $(G,*,e)$ חבורה אז תת קבוצה $H \subseteq G$ תקרא תת חבורה של G אם H חבורה ביחס לפעולה *. מסמנים $H \leq G$ **.**

טרמינולוגיה: קוראים לחבורה $\{e\}$ **החבורה הטריוויאלית**. כאשר אומרים **תתי-החבורות הטריוויאליות** של חבורה G, מתכוונים ל- $\{e\}, G$.

דוגמאות לת"ח

1. $(\mathbb{Z},+,0) \leq (\mathbb{Q},+,0)$
2. $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ **.**
3. האם: $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$? תשובה: לא!! כי פעולת החבורה היא שונה. למה אנחנו מתכוונים בפעולות שונות? שימו לב ש 2 הוא ההפכי של 1 ב- $\mathbb{Z}_3$, אבל ב $\mathbb{Z}_6$ זה לא נכון. בצורה דומה $\mathbb{Z}_n \not\leq \mathbb{Z}$ **.**
4. קבוצת כל החזקות של איבר מסוים בחבורה היא ת"ח. כלומר אם G חבורה, ו- $x \in G$ אזי $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leq G$ **.** קבוצת כל החזקות החיוביות היא אגודה, קבוצת כל החזקות הלא-שליליות היא מונואיד.

הגדרה: נקרא ל $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leq G$ ת"ח **הציקלית** של G **הנוצרת** ע"י a ונסמן ב $< a >$.

חבורה הנוצרת ע"י איבר אחד נקראת **חבורה ציקלית** ($< a >= G$)**.**

המשמעות של הגדרה זו שאם G חבורה ציקלית אז קיים איבר $a \in G$ כך שכל איבר $g \in G$ מקיים $g = a^n$ **.** כלומר כל איבר ב G הוא חזקה של a **.**

תרגיל: הראו שבחבורה סופית מתקיים $< a >= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (כלומר לא צריך לדרוש ש $a^0 = e, a^{-n} \in < a >$)

פתרון: התרגיל מתקיים עבור $a = e$ -- ברור. ראינו בתרגולים קודמים שבחבורה סופית לכל $e \neq a$ מתקיים $a^m = e$ עבור איזשהו $m > 1$, לכן $e \in \{a^n : n \geq 1\}$ ולכן $a^{-1} = a^{n-1} \in \{a^n : n \geq 1\}$, מכאן נקבל שמתקיים $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^{m-1})^n = a^{n(m-1)} \in \{a^n : n \geq 1\}$ **.** לכן $< a > \subseteq \{a^n : n \geq 1\}$ וההכלה בכיוון השני ברורה.

משפט: $|< a >| = o(a)$.

תרגיל: הראו ש $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ אינה חבורה ציקלית.

פתרון: הסדר של החבורה $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ הוא $|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n| = n^2$. לכל $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ מתקיים $n(a,b) = (na, nb) = (0,0) \pmod n$ (אנחנו מתייחסים כאן ל $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ כחבורה חיבורית, והסימונים בהתאם). לכן $|(a,b)| \le n$. נקבל שאין אף איבר מסדר n^2 ולכן $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ אינה חבורה ציקלית.

תרגיל: הראו ש S_4 אינה חבורה ציקלית.

פתרון: סדר של איבר ב S_4 נקבע ע"פ מבנה המחזורים שלו. מבני המחזורים האפשריים ב S_4 הם:

$$\begin{array}{ll} \pi = (abcd) & o(\pi) = 4 \\ \pi = (abc)(d) & o(\pi) = 3 \\ \pi = (ab)(cd) & o(\pi) = 2 \\ \pi = (ab)(c)(d) & o(\pi) = 2 \\ \pi = (a)(b)(c)(d) = (1) & o(\pi) = 1 \end{array}$$

סדר החבורה S_4 הוא 24, ואין אף איבר מסדר זה. לכן החבורה אינה ציקלית.