תרגיל 11 / אלגברה ליניארית להנדסה תש"ף

27 בינואר 2020

1. האם הפונקציה הבאה היא מכפלה פנימית על המרחב הוקטורי הנתון:

(א) $V=\mathbb{R}^2$, ועבור $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ נגדיר: $\langle v,u\rangle=5v_1u_1+9v_1u_2+9v_2u_1+4v_2u_2$. אם כן, חשבו את הנורמה של $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

(ב) $V=\mathbb{R}_2[x]$, ועבור $f(x),g(x)\in V$ נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. אם כן, חשבו את הנורמה של $5x^2-2x+5$.

2. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3,v_4\in V$ ארבעה וקטורים שונים במרחב המקיימים:

$$\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}9 & i=j\\ -3 & i\neq j\end{cases}$$

הוכיחו: $v_1+v_2+v_3+v_4=0_V$ (כאשר 0_V הוא וקטור האפס של V).

3. יהי V ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $v\in V$. הוכיחו:

$$v=0_V \iff \forall w\in V:\langle v,w\rangle=0$$

4. בכל סעיף נתון ממ"פ ושני וקטורים. בדקו האם הם אורתוגונליים.

(א) $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטדנדרטית. $v_2=\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}, v_1=\begin{pmatrix}10\\20\\-16\end{pmatrix}$.

(ב) $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם הכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. $f=4x^2+5x+4, g=4x-2$.

(ג) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr(A\cdot B^t)$. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ד) $V=\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle v,u\rangle=\sum\limits_{k=1}^{3} v_k\overline{u_k}$. $v=\begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix} 1+i \\ -2-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. נתבונן בממ"פ $V=\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו בסיס או"נ לתת המרחב $W\leq\mathbb{R}^4$ המוגדר ע"י:

$$W=span\left\{v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

6. יהיו a,b,c,d מספרים ממשיים חיוביים. הוכיחו:

$$(a+b+c+d)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$$

הדרכה: אי־שיוויון קושי־שוורץ.

7. יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$, ויהי $B=\{v_1,\dots v_n\}\subseteq V$ בסיס. מטרת התרגיל היא להוכיח: קיימת מכפלה פנימית על V כך ש־ B הוא בסיס או"נ עבור מכפלה פנימית זו.

(א) הגדירו מכפלה פנימית על V עבורה B בסיס או"נ.
הדרכה: לכל $v\in V$ קיימים ביחידות $\alpha_{v_1},\dots,\alpha_{v_n}\in\mathbb{F}$ כך ש־ v הוא צ"ל של איברי הבסיס: $v=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{v_i}\cdot v_i$. לצורך נוחות נשים את מקדמי הצירוף בוקטור עמודה, ונסמן: $[v]_B=\begin{pmatrix} \alpha_{v_1} \\ \vdots \\ \alpha_{v_n} \end{pmatrix}$. היעזרו בוקטורי המקדמים להגדיר מכפלה פנימית על V. כלומר, בהינתן $v,u\in V$ ווקטורי מקדמי הצ"ל שלהם $[v]_B=\begin{pmatrix} \alpha_{v_1} \\ \vdots \\ \alpha_{v_n} \end{pmatrix}, [u]_B=\begin{pmatrix} \alpha_{u_1} \\ \vdots \\ \alpha_{u_n} \end{pmatrix}$ הגדירו: $\langle v,u\rangle=?$. הוכיחו שזוהי מכפלה פנימית.

(ב) הוכיחו ש־ B בסיס או"נ עבור המכפלה הפנימית שהגדרתם.

(ג) מקרה פרטי: עבור $V=\mathbb{C}^2$ ובסיס שלו $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}\right\}$, הגדירו מ"פ על V כך ש-B בסיס או"נ, ובדקו שהוא אכן או"נ.