שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 5

תאריך הגשה:16.05

לקבוצה של מני: בתרגול ראינו רק דרך אחת להוכחה שאם X קבוצה כך ש- $|X|>\aleph_0$ אז $(X,\tau_{co-\aleph_0})$ לא מטריזבילי. נציג כעת דרך שניה. לפני זה נציין את ההגדרה הבאה: נאמר שמ"ט X הוא **האוסדורף** אם לכל $x\neq y$ קיימות U,V סביבות זרות של x,y בהתאמה. ניתן להוכיח שכל מ"מ ולכן כל מרחב מטריזבילי הוא האוסדורף. כעת נציג את הדרך השניה להוכחה.

דרך ב: נניח בשלילה ש $(X,\tau_{co-\aleph_0})$ מטריזבילי (כש $|X|>\aleph_0$). אזי הוא האוסדורף. קיימות כמובן נקודות שונות $x,y\in X$. (שימו לב לעוצמה של X) . מתכונת האוסדורף קיימות $U,V\in\tau_{co-\aleph_0}$ כך ש $x\in U,y\in V$ וגם $U\cap V=\varnothing$.

U,V פתוחות ולא ריקות ולכן מהגדרת הטופולוגיה $\tau_{co-\aleph_0}$ נקבל ש U^C,V^C בנות מניה ומכאן הקבוצה $U^C\cup V^C$ היא בת מניה (איחוד סופי של בנות מניה הוא קבוצה בת מניה). אבל, $U\cap V=\varnothing$ ומדה מורגן נקבל ש $U^C\cup V^C=X$.

לכן X בן מניה. בסתירה להנחה.

שאלה 1

שאלה זו מציגה את הוכחתו של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים באמצעות הטופולוגיה הפרו סופית. **מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.**

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S=a+d\mathbb{Z}=\{a+dk|k\in\mathbb{Z}\}$ $(a\in\mathbb{Z},\quad d\in\mathbb{N})$.

נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הפרו סופית בדרך הבאה:

$O\in\tau_{pro}$ אם"ם לכל $x\in O$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש- $x\in S\subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\bigcup p\mathbb{Z}=\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

<u>שאלה 2</u>

נסמן ב $\Re_l$ את המספריים הממשיים עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.
ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau \subset T$ (הכלה <u>אמיתית</u>!).
ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

<u>שאלה 3</u>

יהיה X מ"ט. $A \subseteq X$ תת מרחב, אזי $S \subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q \subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S = Q \bigcap A$.

<u>תרגיל 4</u>

תהי X קבוצה לא ריקה. האם המרחב $\left(X, \tau_{cof}\right)$ מטריזבילי?

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה .
ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי - הינה רציפה.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

ג. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_2\subseteq\tau_3$ וגם $\tau_4\subseteq\tau_1$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ וגם $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

<u>שאלת בונוס</u>

יהי Y מ"ט. $Z\subseteq Y$ הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. Z תת קבוצה סגורה של Y.

ב. קיים כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ של Y כך ש $Z\cap U_i$ סגורה ב U_i לכל $i\in I$.

בהצלחה!