מבוא לאנליזה מתקדמת מועד א תשפא

מרצה: תמר בר-און
מתרגל: אריאל וייצמן
יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. מצאו פתרון כללי למד"ר

$$y'' + y' + y = x^2 + x + 1$$

ראשית נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה.

$$y'' + y' + 1 = 0$$

הפולינום האופייני: $\lambda^2 + \lambda + 1$

שורשים: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

לכן

$$y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

כעת נמצא פיתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית.

פולינום כללי ממעלה 2 נראה כך: $y_p = ax^2 + bx + c$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

נציב במשוואה

$$2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$$

$$a = 1$$

$$2a+b=1 \Longrightarrow b=-1$$

$$2a+b+c=1 \Longrightarrow c=0$$

כלומר

$$y_p = x^2 - x$$

ולכן

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + x^2 - x$$

2. מצאו את כל הפתרונות של המד"ר . (ניתן להשאיר את הפתרון בצורה סתומה)

$$y' = (x^3 + 2x + \sin x)(y^2 - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + 2x + \sin x)(y^2 - 4)$$

$$\frac{dy}{y^2-4} = (x^3 + 2x + \sin x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2-4} = \int (x^3 + 2x + \sin x)dx$$

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y-2}$$

$$A(y-2) + B(y+2) = 1$$

$$A + B = 0$$

$$-2A + 2B = 1$$

$$B = \frac{1}{4}, A = -\frac{1}{4}$$

$$\int (x^3 + 2x + \sin x)dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + \cos x + c$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{-1}{y+2}+\frac{1}{y-2}=\frac{1}{4}\ln\frac{y-2}{y+2}$$
$$\frac{y-2}{y+2}=x^4+4x^2+4\cos x+c$$

פתרונות סינגולריים: $y=2$ ו$y=-2$.

3. חשבו את כל הענפים של 3^{1+i}. קבעו מי מהם הענפים העיקרי.

$$3^{1+i}=e^{\ln_{\mathbb{C}} 3^{1+i}}=e^{(1+i)\ln_{\mathbb{C}} 3}=e^{(1+i)(\ln 3+2\pi k i)}=e^{\ln 3-2\pi+(\ln 3+2\pi k)i}=e^{\ln 3-2\pi k}cis(\ln 3+2\pi k)$$

הענף העיקרי מתקבל עבור $k=0$. כלומר, שווה ל$e^{\ln 3-2\pi k}cis(\ln 3)$

4. קבעו האם הפונקציה המרוכבת הבאה גזירה, באמצעות משוואות קושי רימן. במידה וכן, חשבו את הנגזרת.

$$f(x+iy)=(x+iy)(e^x\cos y+ie^x\sin y)$$

ראשית, נפשט את הפונקציה.

$$f(x+iy)=xe^x\cos y-ye^x\sin y+i(ye^x\cos y+xe^x\sin y)$$

$$U=xe^x\cos y-ye^x\sin y$$

$$V=ye^x\cos y+xe^x\sin y$$

$$U_x=e^x\cos y+xe^x\cos y-ye^x\sin y$$

$$U_y=-xe^x\sin y-e^x\sin y-ye^x\cos y$$

$$V_x=ye^x\cos y+e^x\sin y+xe^x\sin y$$

$$V_y=e^x\cos y-ye^x\sin y+xe^x\cos y$$

מתקיים

$$U_x=V_y,U_y=-V_x$$

לכן הפונקציה גזירה. הנגזרת שלה היא

$$f'(x+iy)=e^x\cos y+xe^x\cos y-ye^x\sin y+i(ye^x\cos y+e^x\sin y+xe^x\sin y)$$

5. הוכיחו שלכל מספר מרוכב z מתקיים

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} -$$

$$\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4} = \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4} =$$

$$\frac{2e^{2iz}+2^{-2iz}}{4} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(2z)$$

6. מצאו את כל הפתרונות המשוואה

$$z^5 = \sqrt{3}+i$$

$$\sqrt{3}+i = 2cis(\frac{\pi}{6})$$

$$z_k = \sqrt[5]{2}cis(\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5})$$

$$z_0 = \sqrt[5]{2}cis(\frac{\pi}{30})$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}cis(\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi}{5})$$

$$z_2 = \sqrt[5]{2}cis(\frac{\pi}{30}+\frac{4\pi}{5})$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2}cis(\frac{\pi}{30}+\frac{6\pi}{5})$$

$$z_4 = \sqrt[5]{2}cis(\frac{\pi}{30}+\frac{8\pi}{5})$$