אינפי 1 תרגול 13

18 בינואר 2021

1 גזירות

משפטים:

- חשבון של נגזרות.
- רול: f מוגדרת ורציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) אם מתקיים $f(a)=f(b)$ אז יש $c\in(a,b)$ כך ש־ $f'(c)=0$.

תרגילים:

1. תהי f פונקציה גזירה ב־$\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

הוכיחו ש־f גזירה פעמיים, ושמתקיים: $f''(x)=2$.

פתרון: נשים לב שעבור $y=0$ נקבל:

$$f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)+0$$

$$f(0)=0$$

כעת, נחשב את הנגזרת בנק' כללית:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2x$$

נחשב $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

כלומר, קיבלנו:

$$f'(x) = 2x + f'(0)$$

ולכן f' גזירה ולכן f גזירה פעמיים. ומתקיים:

$$f''(x) = (2x + f'(0))' = 2$$

מש"ל.

2. עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x) = |x| \cdot |5 - x|$ גזירה?
פתרון: נרשום אותה כפונקציה מפוצלת:

$$f(x) = \begin{cases} -x(5-x) & x < 0 \\ x(5-x) & 0 \leq x \leq 5 \\ -x(5-x) & x > 5 \end{cases}$$

עבור $x < 0, 0 < x < 5, x > 5$ היא גזירה כמכפלת גזירות. נבדוק בנק' הבעייתיות:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(5-x) - 0}{x} = 5$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-x(5-x) - 0}{x} = -5$$

ולכן f לא גזירה ב0. עבור 5:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(5+h)(5-(5+h)) - 0}{h} = 5$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = -5$$

ולכן לא גזירה ב5.

3. מצאו ביטוי סגור עבור $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$.
פתרון: עבור $x = 1$ נקבל סדרה חשבונית שסכומה:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

עבור $x \neq 1$ נתבונן בפונקציה

$$f(x) = x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

ומה שאנחנו מחפשים זה בדיוק $f'(x)$. נחשב את $f(x)$ כנוסחא סגורה: זו סדרה הנדסית ולכן נקבל:

$$f(x)=\frac{x(x^n-1)}{x-1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

נגזור ונקבל את הדרוש:

$$f'(x)=\frac{\left((n+1)x^n-1\right)(x-1)-\left(x^{n+1}-x\right)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

4. הוכיחו את הנוסחא: $\cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{\pi n}{2})$

פתרון: באינדקוציה על n: עבור $n=1$ אכן נקבל:

$$\cos'(x)=-\sin x=\cos(x+\frac{\pi}{2})$$

נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$\cos^{(n+1)}x=\left(\cos^{(n)}x\right)'=\left(\cos(x+\frac{\pi n}{2})\right)'=$$

$$=-\sin(x+\frac{\pi n}{2})=\cos(x+\frac{\pi(n+1)}{2})$$

5. הוכיחו שלמשוואה $x-\frac{1}{2}\sin x=3$ יש בדיוק פתרון אחד.

פתרון: נגדיר $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x-3$. נשים לב ש־

$$f(0)=-3<0$$

$$f(4)>0$$

ולכן, לפי ערך הביניים, יש $c\in(0,4)$ כך ש־ $f(c)=0$ וקבלנו פתרון למשוואה.
כעת, נניח בשלילה שיש פתרון נוסף, נסמנו $d\neq c$. קיבלנו $f(d)=f(c)=0$, ולכן יש e ביניהם לפי רול עבורו $f'(e)=0$. נבדוק אם הנגזרת מתאפסת:

$$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x>0$$

בסתירה לכך שמצאנו נק' בה הנגזרת מתאפסת.

משפטים נוספים שתראו בהמשך:

- לגראנז: אם f מוגדרת ורציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בפתוח (a,b) אז יש $c \in (a,b)$ עבורו:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- קושי: אם f,g מוגדרות ורציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בפתוח (a,b) אז יש $c \in (a,b)$ עבורו:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- דרבו: תהי f גזירה בקטע הסגור $[a,b]$ אז f' מקבלת כל ערך בין $f'_+(a), f'_-(b)$.

תרגילים:

1. הוכיחו את א"ש: $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ בקטע $(0,\pi)$.

פתרון: נגדיר $f(x) = \sin x$. לכל $x \in (0,\pi)$ נקבל ש- f מקיימת את תנאי לגראנז בקטע $[0,x]$, ולכן יש $c \in (0,x)$ עבורו:

$$f'(c) = \cos c = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{\sin x}{x}$$

לבסוף, כיון ש- $c < x$ נקבל:

$$\cos x < \cos c = \frac{\sin x}{x}$$

2. הוכיחו את א"ש:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin 0.6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$$

פתרון: אנחנו יודעים: $\arcsin 0.5 = \frac{\pi}{6}$. נגדיר $f(x) = \arcsin x$ המקיימת את תנאי לגראנז בקטע $(0.5, 0.6)$, ולכן יש $c \in (0.5, 0.6)$ עבורו:

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = f'(c) = \frac{\arcsin 0.6 - \frac{\pi}{6}}{0.1}$$

נציב בנגזרת את הערכים $0.5, 0.6$:

$$f'(0.5) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f'(0.6) = \frac{5}{4}$$

ונקבל

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = f'(0.5) < f'(c) < f'(0.6) = \frac{5}{4}$$

ולכן:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{\arcsin 0.6 - \frac{\pi}{6}}{0.1} < \frac{5}{4}$$

ואחרי אלגברה:

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin 0.6 < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}$$

3. הוכיחו שלכל $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ מתקיים:

$$|\tan x - \tan y| \leq 8|\sin x - \sin y|$$

פתרון: יש כאן שתי פונקציות, לכן נשתמש בקושי. נגדיר $f(x) = \sin x, g(x) = \tan x$ ולפי לכל $x < y$ בקטע יש $c \in (x, y)$ עבורו:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y}$$

נחשב את מנת הנגזרות:

$$\frac{\sin' x}{\tan' x} = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^3 x$$

בסה"כ, יש $c \in (x, y)$ עבורו:

$$\cos^3 c = \frac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y}$$

נשים לב שהכל בקטע $[0, \frac{\pi}{3}]$, ולכן נקבל:

$$\cos^3 c \geq \cos^3 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$$

אנחנו בחרנו $x < y$, בשאלה אין את ההתניה הזו ולכן ערך מוחלט.