

$y=2$ $x=1$ $y=3$

$(1, \frac{\pi}{4})$ $(\frac{\pi}{4}, 1)$ $y=2$ $f(y) = x^2$

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{dx^2}{dx}$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos^2 y$$

$y = \frac{\pi}{4}$ $x = 1$ $y = 3$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

משפט

אם L וקטע Δ נמצאים בנקודה x_0 ונגזרת $f(x)$ קיימת בנקודה x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{פירוט} \quad f(x_0) = L, \quad x \rightarrow x_0 \text{ בלבד}$$

x_0 וקטע Δ נמצאים בנקודה x_0 , $f(x) = x$ וקטע Δ : $f(x) = x - x_0$, $x \rightarrow x_0$ בלבד

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta)] \quad \text{נקודה בנקודה בנקודה}$$

(אם וקטע Δ נמצאים בנקודה x_0 ונגזרת $f(x)$ קיימת בנקודה x_0)

$\Delta \rightarrow 0$ וקטע Δ

נגזרת $f(x)$ קיימת בנקודה x_0 וקטע Δ נמצאים בנקודה x_0

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \quad : x_0 = 0 \text{ בלבד} \quad \text{I}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta} - \sqrt{x_0}}{\Delta} \quad : x_0 = 0 \text{ בלבד} \quad \text{II}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta - x_0}{|\Delta|} = 1 \quad x_0 = 0 \text{ בלבד} \quad \text{III}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = -1$$

נגזרת $f(x)$ קיימת בנקודה x_0 וקטע Δ נמצאים בנקודה x_0

הגדרת גבולות פונקציה

עמוד

$$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^2 + 1}{y + 1} \quad 1$$

$$S(y) = -1 \quad S\left(\frac{y^2 + 1}{y + 1}\right) = S(y - 1) = -1 - 1 = -2 \quad \text{לכן}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 2t^2 + 4}{3t^2 - 5t + 7} \quad 2$$

$$S(t) = 0 \quad S\left(\frac{t^3 - 2t^2 + 4}{3t^2 - 5t + 7}\right) = \frac{S(t^3 - 2t^2 + 4)}{S(3t^2 - 5t + 7)} = \frac{4}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{4}{x}} \quad 3$$

$$S(x) = 0 \quad S\left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{4}{x}}\right) = S\left(\frac{x + 2}{3x - 4}\right) = \frac{S(x + 2)}{S(3x - 4)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 4} 3t^2 + t - 1 \quad 4$$

$$S(t) = 1 \quad S(3t^2 + t - 1) = 3 \cdot 4^2 + 4 - 1 = 47$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|a - x|} \quad 5$$

$$S(x) = 0 \quad S(\sqrt{|a - x|}) = \sqrt{|a - x|} = \sqrt{|S(a - x)|} = 0$$

? $L = f(x_0)$ נכונה רק אם, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ נכון ורק אז

א) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ \rightarrow נכון, זה נכון

נכון זה נכון

? $L = f(x_0)$ נכונה רק אם, נכון אכן $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ נכון ורק אז

זה נכון

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{נכון}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = S(f(x + \Delta x)) = S(f(0)) = 0$$

$$f(0) = 1 \quad \text{נכון}$$

אם נכון, אז נכון גם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ נכון ורק אז

(הצורה של הפונקציה והגבולות)

$$1. \lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \quad \begin{matrix} \text{yes} \\ \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0 \end{matrix}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \quad \begin{matrix} \text{yes} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0 \end{matrix}$$

proofs are in the next pages

$$2. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) \quad \begin{matrix} \text{yes} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (g(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) + \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$\frac{1}{f(x)}$ is not a function, $x \neq 0 \rightarrow$ limit of $f(x)$ is not a limit
 $x \neq 0 \rightarrow$ limit is

limit of $f(x) = x$ is $\frac{1}{x}$, not a function, limit is

$x \neq 0 \rightarrow$ limit of $f(x) = \frac{1}{x}$ is not a function, limit is

$\frac{1}{\lim f(x)}$

is not a function, limit is not a function, limit is

$x_0 \rightarrow$ limit of \sqrt{x} is not a function, limit is

$0 \rightarrow$ limit of \sqrt{x} is not a function, limit is

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ is not a function, limit is

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ is not a function, limit is

5. limit of

$x_0 \rightarrow$ limit of $f(x)$ is not a function, limit is

$f(x)$ is not a function, limit is

$f(x) = \frac{1}{x}$, limit of $f(x)$ is not a function, limit is

$0 \rightarrow$ limit of $f(x) = \frac{1}{x}$ is not a function, limit is

limit of $f(x) = \frac{1}{x}$ is not a function, limit is

למה זה עובד? $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}$ $\lim_{x \rightarrow 3^-}$ $\lim_{x \rightarrow 3}$ $\lim_{x \rightarrow 3^+}$ $\lim_{x \rightarrow 3^-}$ $\lim_{x \rightarrow 3}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}$$

זהו! הוכחה

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\Delta x} - 1}{3+\Delta x - 4} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x} - 1}{\Delta x - 1} = \frac{\sqrt{\Delta x} - 1}{\Delta x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

הוכחה למה $\lim_{x \rightarrow 3^-}$ $\lim_{x \rightarrow 3^+}$ $\lim_{x \rightarrow 3}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ $\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ $\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

$\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

$x_0 = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(0) = 0 = f(0)$$

הוכחה $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - 5x + 4$ $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - 5x + 4$ $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - 5x + 4$

$x_0 = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - 5x + 4 = 3(3)^2 - 5(3) + 4 = 27 - 15 + 4 = 16$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3(x_0 + \Delta x)^2 - 5(x_0 + \Delta x) + 4) =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 5x_0 - 5\Delta x + 4) =$$

$$3x_0^2 - 5x_0 + 4 = f(x_0)$$