תרגיל 10

הנחיות: בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים: מספר תרגיל, שם מלא, ת.ז וסימן זיהוי לקבוצת התירגול שלכם (מספר קבוצה או יום +שעה).

ענו על השאלות הבאות:

1. לכסנו או"ג את $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

פתרון : נמצא פ"א, ע"ע, מ"ע

$$f_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\\lambda+1&\lambda+1&\lambda+1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

מ"ע

$$V_2=N(\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})=span\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{-1}=N(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0&3&-3\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0&3&-3\\1&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix})=sp$$

נפעיל גרם שמידט על כל מ"ע בנפרד:

$$\begin{aligned}w_1&=v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\w_2&=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ננרמל כדי למצוא בסיס או"נ ל V_2

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ננרמל את v_3 לקבל בסיס או"נ ל V_{-1}

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ונגדיר

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

להיות מטריצה של הו"ע המנורמלים ואז

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי קיימת B סימטרית המקיימת $B^3 = A$

פתרון : נסמן $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ את הע"ע של A. כיוון ש A סימטרית קיימת P או"ג כך ש $P^tAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ומכן ש $A = PDP^t$. נגדיר $D' = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix}$, היא מקיימת $D'^3 = D$. נגדיר $B = PD'P^t$, מטריצה סימטרית וגם

$$B^3 = PD'^3P^t = PDP^t = A$$

כנדרש.

3. תרגיל: תהא A סימטרית כך שקיים k טבעי המקיים $A^k = I$. הוכיחו כי A או"ג (שימו לב שהתרגיל הוא מסקנה של השיוון $A^2 = I$) .

פתרון : כיוון ש A מאפסת את $x^k - 1$ נקבל שהפ"מ של A מחלק את $x^k - 1$. כלומר $x^k - 1 = m_A(x) \cdot q(x)$ עבור פולינום כלשהוא $q(x)$. כיוון שA סימטרית היא לכסינה ולכן m_A מל"ל. כל שורש של m_A יהיה שורש של $x^k - 1$ כלומר שורש יחידה מסדר k. השורשים היחדים בממשיים הם מהקבוצה $\{\pm 1\}$ ולכן קיימת P כך ש $P^tAP = D$ ו D אלכסונית עם ערכים ± 1 בלבד. מכאן ש $A = PDP^t$ ולכן $A^2 = PD^2P^t = PIP^t = I$. נסיים ע"י שימוש ההגדרה של מטריצה סימטרית

$$AA^t = AA = A^2 = I$$

כנדרש.

בהצלחה! ☺