פתרון למועד א' תשס"ד

שאלה 1.

א. לא (ראה תרגול).

ב. לא, יש בדיוק 2 (יוצר עובר ליוצר ויש רק שני יוצרים).

ג. כן, קחו למשל את $\mathbf{Z}_5$ ובו את: $1^5 = 5 \equiv 0 \pmod 5$ ו- $4^5 = 4 \cdot 5 = 20 \equiv 0 \pmod 5$.

ד. לא, בדיוק שווים, יש $\varphi(20) = 8$ איברים בשניהם.

ה. לא: יש רק תת-חבורה 11 סילו אחת ורק תת-חבורה 17 סילו אחת. מכפלת היוצרים שלהם היא מסדר 187 ולכן ציקלית ולכן אבלית (ראה בתרגול מקרה דומה עם סדר 143).

ו. לא, קחו את: $G = D_3$ למשל, $\forall a \in G: \ o(a) \le 3$, ולא אבלית.

ז. כן, אפשר להשתמש במשפט קיילי ולומר, שכל חבורה מסדר n היא איזומורפית לתת-חבורה של S_n והרי את איברי S_n אפשר לייצג באמצעות מטריצות ב- $GL_n(R)$ (ראה תרגול).

שאלה 2.

א. ראה בהרצאה.

ב. ראה תרגול. דוגמא נגדית: $D_3 = \left\langle a,b \mid a^2=1, b^3=1, ba=ab^2 \right\rangle$ ו- $H = \langle a \rangle$.

שאלה 3.

א. ראה בהרצאה.

ב. עפ"י אוילר: $(28,99)=1 \Rightarrow 28^{\varphi(99)} \equiv 1 \pmod{99}$ כלומר:

$$28^{60} \equiv 1(99) \Rightarrow 28^{301} = \left(28^{60}\right)^5 \cdot 28 \equiv 28(99)$$

על כן צריך למצוא x כך ש: $28x \equiv 2004(99) \equiv 24(99)$ וזה שקול ל: $7x \equiv 6(99)$.

כלומר: $x \equiv 6 \cdot 7^{-1}(99)$. ע"י אלגוריתם אוקלידס נמצא את ההופכי של 7:

$99 = 14 \cdot 7 + 1$ מכאן: $7^{-1} = -14$ ולכן: $x = 6 \cdot (-14) = -84 \equiv 15(99)$.

שאלה 4.

א. תחילה נראה: $\left(\ ^{+},\cdot\right) \quad {}^{*}\!\big/T$ ע"י: $f: z \mapsto |z|$. קל לראות שזהו אפימורפיזם. כמו כן:

$\ker(f)=\left\{z\in\ ^{*}\,\big|\,|z|=1\right\}=T$ ועפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון: $\left(\ ^{+},\cdot\right) \quad {}^{*}\!\big/T$.

כעת נראה: $\left(\ ,+\right) \quad \left(\ ^{+},\cdot\right)$ ע"י: $g(x)=\ln|x|$. קל לראות שזהו איזומורפיזם. אם נרכיב

את שתי ההעתקות הנ"ל נקבל: $\left(\ ,+\right) \quad {}^{*}\!\big/T$ ע"י: $z\mapsto \ln|z|$.

לגבי: $T \quad \big/5$ נוכיח ע"י: $f:\theta\mapsto e^{\frac{2\pi i\theta}{5}}$. קל לראות שהו אפימורפיזם. כמו כן:

$$\ker(f)=\left\{\theta\in\ \Big|\ e^{\frac{2\pi i\theta}{5}}=1\right\}=\left\{\theta\in\ \Big|\ \frac{2\pi\theta}{5}\in 2\pi\mathbf{Z}\right\}=\left\{\theta\in\ \big|\ \theta\in 5\mathbf{Z}\right\}=5\mathbf{Z}.$$

ב. ניתן למיין תמונות אפימורפיות ע"י הגרעינים, כלומר תת-חבורות נורמליות.

עבור $\mathbf{Z}\quad\left\langle cis\sqrt{3}\pi\right\rangle$ הגרעינים הם חבורות ציקליות $n\mathbf{Z}$ מכל סדר, $\mathbf{Z}$, ו- $\{0\}$. על כן תמונות

אפימורפיות הן (עד כדי איזומורפיזם): $\{0\}$, $\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}_n\ \ \forall n\in\ $.

הגרעינים של $D_3=\left\langle a,b\ \big|\ a^2=1,\ b^3=1,\ ba=ab^2\right\rangle$ הם: D_3 , $\langle b\rangle$ ו- $\{0\}$. על כן תמונות

אפימורפיות הן (עד כדי איזומורפיזם): $D_3,\ \mathbf{Z}_2,\ \{0\}$.

שאלה 5.

א. נכתוב את α כמכפלה של עגילים זרים: $\alpha=(2,15,9,10)(7,12)$ ואז: $o(\alpha)=[4,2]=4$.

על כן: $\alpha^{205}=\alpha$ ולכן: $o\left(\alpha^{205}\right)=o(\alpha)=4$. מס' העגילים הזוגיים הוא זוגי על כן α היא

זוגית. לגבי $\alpha^{-1}\beta\alpha$, הצמדה לא משנה סדר, לכן: $o\left(\alpha^{-1}\beta\alpha\right)=o(\beta)=5$. גם β זוגית.

ב. אורך של מסלול הצמדה הוא מס' התמורות מאותו הטיפוס: $\left|[\beta]\right|=\binom{15}{4}(4-1)!=8190$.

ג. אם ניקח עגיל באורך 8 ועגיל באורך 5, מכפלתם תהיה מסדר $40=[8,5]$. גם החבורה הנוצרת ממכפלה זו תהיה מסדר 40: $\langle(1,2,3,4,5,6,7,8)(9,10,11,12,13)\rangle \le S_5$ (ראה תרגול).

שאלה 6.

א ראה בהרצאה.

ב. צריך לספור את המסלולים השונים עד כדי פעולת החבורה D_6. ניתן לבנות אותה כך:

נמספר את המשולשים בקצוות ב- $1,2,3,4,5,6$ ואז: $D_6=\langle a,b\rangle$ כאשר:

$b=(1,2,3,4,5,6)$ ו- $a=(2,6)(3,5)(1)(4)$. נקבל:

$$b^2=(1,3,5)(2,4,6)\quad b^3=(1,4)(2,5)(3,6)\quad b^4=(1,5,3)(2,6,4)\quad b^5=(1,6,5,4,3,2)$$
$$ab=(1,6)(2,5)(3,4)\quad ab^2=(1,5)(2,4)(3)(6)\quad ab^3=(1,4)(2,3)(5,6)$$
$$ab^4=(1,3)(4,6)(2)(5)\quad ab^5=(1,2)(3,6)(4,5)$$

נרשום את הטבלה הבאה:

$type$	$g\in type$	$\# g\in type$	$\lvert X_g\rvert$	סה"כ
$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	id	1	3^6	$3^6=729$
(a,b,c,d,e,f)	b,b^5	2	3	$2\cdot 3=6$
$(a,b,c)(d,e,f)$	b^2,b^4	2	3^2	$2\cdot 3^2=18$
$(a,b)(c,d)(e,f)$	$b^3,ab,\ ab^3,\ ab^5$	4	3^3	$4\cdot 3^3=108$
$(a,b)(c,d)(e)(f)$	$a,\ ab^2,\ ab^4$	3	3^4	$3\cdot 3^4=243$

מכאן עפ"י משפט Burnside: $k=\frac{1}{12}(729+6+18+108+243)=92$.

שאלה 7.

א. החבורה A_5 היא מסדר $\frac{5!}{2}=60$ והיא פשוטה, לכן לא פתירה, ראה הוכחה בהרצאה.

ב. ראה בקובץ "חבורות פתירות" באתר.